



По следам
математики в
городе
Швебиш Гмюнд

Все есть число!...

Как будет организована прогулка?

- Во время прогулки по Швебиш Гмюнд ваша группа должна решить задачи, которые находятся в этой папке.
- Вы можете выполнять задачи в любом порядке.
- Вы не привязаны к каким-то конкретным местам в городе, а должны сами найти подходящие места. Внимание: Вы должны суметь найти дорогу назад!
- Дополнительно вам будет дано время в течении дня для того чтобы детально оформить решение задач.
- В этой папке вы найдете для каждого из вас анкету. Заполните анкеты и вложите их в папку вместе с решениями.
- Вы все сделали? Супер! Тогда сдавайте вашу папку.

Вспомогательные материалы:

План города в двух экземплярах, транспорир, рулетка, калькулятор, логарифмическая линейка

Красивые здания, изобразительное искусство и прекрасные книги

Термин «Золотое сечение» ассоциируется с Леонардо да Винчи и характеризует соотношение величин. С этим замечательным коэффициентом - соотношением величин - мы часто встречаемся в повседневной жизни, в математике, биологии, архитектуре, искусстве – хотя порой этого даже не осознаем ...



Золотое сечение (золотая пропорция, деление в крайнем и среднем отношении) — соотношение двух величин, равное соотношению их суммы к большей из данных величин.

$$\frac{AS}{BS} = \frac{AB}{AS}$$

Нетрудно доказать, что это соотношение равно числу

$$\varphi = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} = 1,6180339887\dots$$

которое и известно как ЗОЛОТОЕ СЕЧЕНИЕ.

Задача

- Найдите по дороге через город цветы, листья, произведения искусства или отрезки на человеческом теле и т.д., которые находятся в золотой пропорции. Для каждого найденного случая зафиксируйте место на карте города, где это было найдено и сделайте эскиз найденного соотношения. Возможно вы даже знаете названия некоторых из найденных вами растений?
- В подзадаче а) вы вероятно заметили, что постоянное измерение расстояний очень трудоемко. Придумайте поэтому своего рода циркуль, с помощью которого можно сразу же установить, делит ли точка определенный отрезок в золотом сечении. Сделайте эскиз или модель и обоснуйте способ функционирования. Готовую модель сдайте вместе с папкой.

Совет: Возьмите за основу обычный циркуль и постройте подвижную вкладку, который показывает вашу точку.



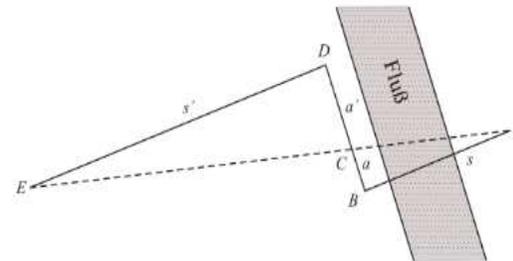
Искусство измерения

Часто расстояния не могут быть измерены непосредственно. В таких случаях однако удается с помощью метода неявного измерения определить соответствующие дистанции. При этом используются различные математические теоремы, такие как теорема Пифагора, теорема Фалеса, или подобие треугольников.

Также и в Швебиш Гмюнде вы можете найти много водоемов, цветочных клумб или колодцев, ширина которых не может быть измерена непосредственно.



Следующий рисунок может помочь измерить ширину реки или цветочной клумбы. В точке В разметим прямой угол и выберем произвольно на его стороне точку С. На продолжении этой стороны выберем произвольно точку D. Построим прямой угол с вершиной в точке D так, что точка E лежит на линии AC.



Задача

Найдите речку или цветочную клумбу или колодец...
Укажите на карте и в решении место, которое вы выбрали.

- Какая теорема стоит за этим методом неявного измерения?
- Сформулируйте теорему! Обращайте внимание на математически корректную формулировку.
- Как можно теперь применяя а) теоретически определить длину отрезка s ? Составьте соответствующее алгебраическое уравнение!
- Произведите измерения на выбранном объекте и вычислите его ширину!

Составление маршрута

Представьте себе что вы туристы в Швебиш Гмюнде и хотите посетить 5 достопримечательностей. Конечно вы хотели бы сэкономить время и найти возможно короткий путь, причем каждую достопримечательность вы хотите посетить в точности один раз.

Задача

- В качестве начального/конечного пункта выберете какое-то место на центральной площади Марктплатц (Marktplatz). Выберете 5 любых достопримечательностей в Швебиш Гмюнде (включая Марктплатц), какой-то один из возможных вариантов их обхода (начальный и конечный путь должны совпадать) и отобразите соответствующий взвешенный граф. При этом вы должны сами решить, какие улицы вы выбираете, чтобы попасть от одной достопримечательности к другой. Обозначьте эти улицы в вашем решении.
- Попробуйте составить кратчайший маршрут обхода. Развивайте при этом различные стратегии и сравнивайте результаты. Например: Всегда будем выбирать то место, которое ближе всего к достопримечательности. Какая стратегия лучшая?

Короткий экскурс в теорию графов

Определение: Совокупность из точек и линий называется граф, если каждая линия соединяет в точности две точки. Линии называются ребрами, а точки вершинами.

Определение: Граф, который содержит данные о длине ребер, называется взвешенным графом.



Вычислять как бабушки и дедушки

Немного расслабиться? Давай!

Задача

1. Найди дерево, которое вам особенно понравилось 😊 (Не забудьте отметить в решении, какое дерево вы выбрали!)
2. Вычислите высоту дерева с помощью транспортира и теоремы Фалеса. Опишите при этом ваш подход к решению используя чертеж!
3. Определите объем ствола (цилиндр)!

ВНИМАНИЕ:

У бабушек и дедушек не было калькуляторов и им помогала при вычислениях логарифмическая линейка. В этой задаче вы тоже должны при вычислениях использовать эту линейку! Как она функционирует? Просто прочитайте инструкцию. Саму логарифмическую линейку и инструкцию к ней вы найдете в папке.

Задача

1. Почему задачи на умножение могут быть решены с помощью сложения отрезков? Какая идея / какой логарифмический закон стоит за этим?
2. Сформулируйте инструкцию для деления двух чисел с помощью этой логарифмической линейки и назовите закон, который за этим стоит!

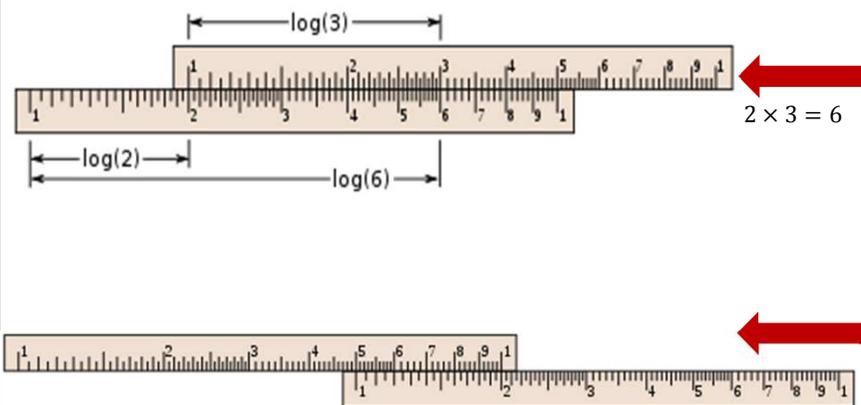
Логарифмическая линейка

Die Bestandteile

Логарифмическая линейка состоит из фиксированной основы, движущейся части и движка. Обычно на линейке имеется несколько скал - К для кубических чисел, А для квадратных чисел, ... Однако для умножения и деления двух чисел важны в основном только скалы С и D.

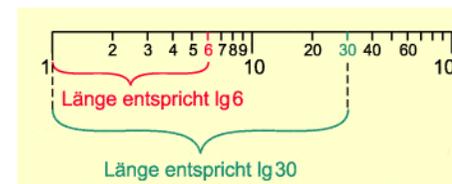
Запятая

На скалах С и D имеются деления с 1 до 10. Но это не означает, что вычисления могут проводиться только в этом интервале. Это предположение неверно, поскольку вычисления на линейке не учитывают запятой. Если на линейке получается значение 3, то оно может означать еще и 0,3; 300; 3000; ... Поэтому сначала должны быть произведены приблизительные расчеты, для того чтобы определить положение запятой в окончательном ответе.



Скалы

Скалы логарифмической линейки - это логарифмические скалы, которые могут быть описаны с помощью функции . Это означает, что значению числа 6 соответствует длина отрезка . Логарифмы возрастают не прямо пропорционально и поэтому также логарифмические скалы не прямо пропорциональны, то есть расстояние между двумя соседними величинами становятся все меньше и меньше.



Умножение

Складывая два числа с помощью скал С и D получают произведение этих чисел благодаря вычислительным законам для логарифмов.

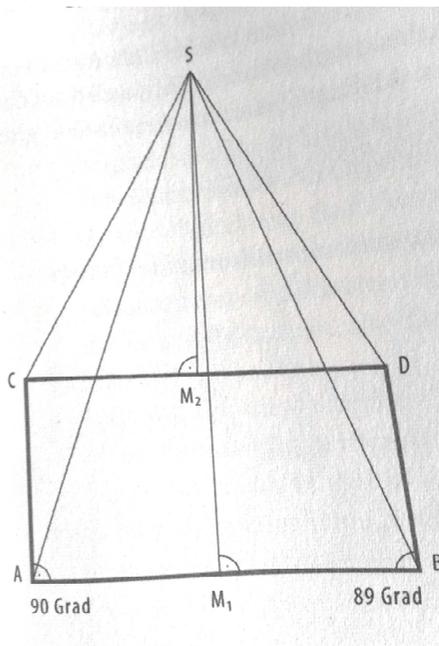
Сначала точка отсчета 1 скалы С ставится точно над первым множителем на скале D. Движок надо теперь передвинуть ко второму множителю на скале С. Результат виден на месте движка на скале D.

Если произведение превосходит значение 10, то пользуясь указанным способом невозможно увидеть на линейке значение произведения. В этом случае над первым множителем на скале D ставится не точка отсчета 1, а конечное значение 10 скалы С. Как всегда сдвигаем движок ко второму множителю и видим результат на скале D.

Головоломка по дороге

Это задача, с которой вы можете получить дополнительные очки, на тот случай, если вы уже решили все остальные задачи.

Доказательство того, что 90 градусов равны 89 градусам



Задача Где же ошибка?

К стороне AB проведена слева под прямым углом сторона AC и справа сторона BD под углом 89 градусов. Возник немножечко косоугольный четырехугольник ABCD.

Теперь проведем серединные перпендикуляры к AB и CD соответственно. Поскольку AB и CD не параллельны, эти серединные перпендикуляры тоже не параллельны. Они пересекаются где-то скажем в точке S.

Точку S соединим с A, B, C и D так, как в (немасштабном) рисунке слева.

Далее следует аргументация с конгруэнтностью.

1. $AS=BS$, поскольку S лежит на серединном перпендикуляре к AB.
2. $CS=DS$, поскольку S лежит на серединном перпендикуляре к CD.
3. Треугольник ASC конгруэнтен BSD по трем сторонам.
4. Угол CAS равен углу DBS. Кроме того угол SAM_1 равен углу SBM_1 , поскольку S лежит на серединном перпендикуляре к AB.

Итак: $90^\circ = CAS + SAM_1 = DBS + SBM_1 = 89^\circ$