Auf den Spuren der Mathematik in Schwäbisch Gmünd

Alles ist Zahl!

Wie geht das?

- Für euren Spaziergang durch Schwäbisch Gmünd erhaltet ihr verschiedene Aufgaben, die ihr in eurer Gruppe bearbeiten müsst.
- Ihr könnt die Aufgaben in einer beliebigen Reihenfolge bearbeiten und seid dabei nicht auf bestimmte Orte festgelegt sondern könnt selbst geeignete Plätze ausfindig machen.
- Zusätzlich habt ihr im Laufe des Tages Zeit um eine ausführliche Lösung für die Aufgaben auszuarbeiten.
- Ihr findet in dieser Mappe einen weiteren Fragebogen für jeden von euch, den ihr bitte zusammen mit den Lösungen in der Mappe wieder abgebt.
- Habt ihr alles bearbeitet? Super! Gebt eure Lösungen zusammen mit den Fragebögen und dem Meterstab in der Mappe ab.

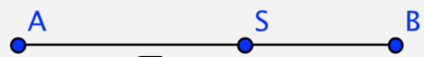
Hilfsmittel

Stadtplan, Geodreieck, Meterstab, Taschenrechner, Rechenschieber

Schöne Bauten, schöne Künste und schöne Bücher

Der goldene Schnitt ist bekannt – mehr oder weniger. In diesem Zusammenhang fallen Stichwörter wie Leonardo Davinci oder ein berühmtes Größenverhältnis. Der goldene Schnitt ist Gegenstand vieler unterschiedlicher Bereiche unseres Lebens - Mathematik, Biologie, Architektur, Kunst….

Eine Strecke ist demnach genau dann im Verhältnis des goldenen Schnittes geteilt, wenn ein Punkt S eine Strecke AB so teilt, dass sich die größere Teilstrecke zur kleineren Teilstrecke verhält wie die Gesamtstrecke zur größeren.



$$\frac{AS}{BS} = \frac{AB}{AS}$$

Dabei ist

$$\varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = 1{,}6180339887\ldots$$

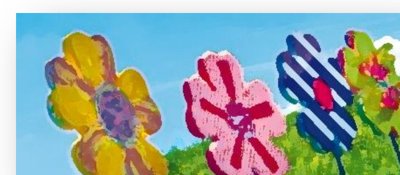
die Zahl, die als der goldene Schnitt bekannt ist, was schnell bewiesen werden kann.

Aufgabe

a) Findet auf eurem Weg durch die Stadt Blumen, Blätter, Kunstgegenstände oder Strecken am menschlichen Körper, die im Verhältnis des goldenen Schnittes geteilt werden! Für jedes Teilverhältnis, das ihr findet, wird eine Ortsangabe gefordert, an der ihr den Gegenstand gefunden habt und eine Skizze zum gesuchten Teilverhältnis, Vielleicht kennt ihr ja sogar die Namen einiger Pflanzen?

b) In Teilaufgabe a) habt ihr sicher gemerkt, dass das ständige Abmessen von Teilstrecken sehr aufwendig ist. Entwerft daher eine Art Zirkel, mit dessen Hilfe man sofort bestimmen kann, ob ein Punkt eine bestimmte Strecke im goldenen Schnitt teilt. Fertigt eine entsprechende Skizze oder ein Modell an (mit der Lösung zusammen abgeben!) und begründet dessen Funktionsweise!

Tipp: Nehmt die Grundform eines normalen Zirkels und baut einen beweglichen Einsatz, der euch den Teilpunkt zeigt.

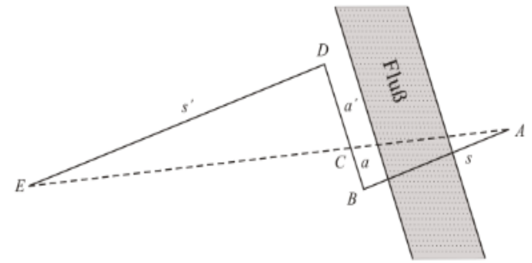


Vermessungskunst

Oft können Strecken nicht direkt gemessen werden. In diesen Fällen gelingt es jedoch dennoch mit Hilfe von Methoden der indirekten Streckenmessung die jeweilige Entfernung zu bestimmen. Man macht sich dabei verschiedene Lehrsätze der Mathematik zu Nutzen, wie den Satz des Pythagoras, die Strahlensätze oder auch die Ähnlichkeit von Dreiecken.

Auch in Schwäbisch Gmünd könnt ihr viele Gewässer, Blumenbeete oder Brunnen finden, deren Breite nicht direkt bestimmt werden kann.

Die folgende Skizze kann dabei helfen die Breite eines Flusses, Blumenbeetes, … zu bestimmen, indem in Punkt B ein rechter Winkel abgesteckt wird um den Punkt C (frei bestimmbar) zu erlangen, Anschließend wird die Strecke von B nach C beliebig verlängert (-> Punkt D). Erneut wird ein rechter Winkel in Punkt D so abgesteckt, dass der neue Punkt E in der Flucht von A und C liegt



Aufgabe Sucht euch einen Fluss oder ein Blumenbeet oder Brunnen, … (Gebt den Ort, den ihr gewählt habt, auch in der Lösung an!)

a) Welcher Lehrsatz steckt hinter dieser Methode der indirekten Streckenmessung?
b) Formuliert den Lehrsatz verbal und mathematisch korrekt!
c) Wie kann nun unter Verwendung von a) die Länge s theoretisch bestimmt werden? Stellt eine entsprechende algebraische Gleichung auf!
d) Nehmt die Maße eurer gesuchten Strecke und berechnet damit deren Länge!

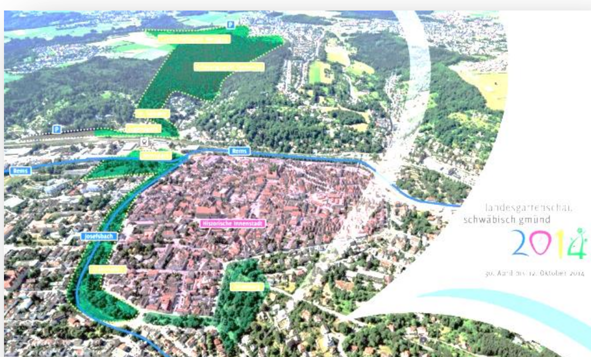
Routenplanung

Stellt euch vor ihr seid Touristen in Schwäbisch Gmünd und möchtet 5 Sehenswürdigkeiten besuchen. Natürlich möchtet ihr Zeit sparen und eine möglichst kurze Strecke finden, wobei ihr an jeder dieser Sehenswürdigkeit nur genau einmal vorbei kommen möchtet.

Aufgabe

a) Sucht euch 5 beliebige Sehenswürdigkeiten, inklusive des Marktplatzes, in Schwäbisch Gmünd und zeichnet einen zugehörigen gewerteten Graphen. Ihr müsst dabei selbst entscheiden, welche Verbindungsstraßen zwischen den Sehenswürdigkeiten ihr nutzt und diese in eurer Lösung kenntlich machen. Ausgangs- und Zielpunkt sind dabei der Marktplatz.

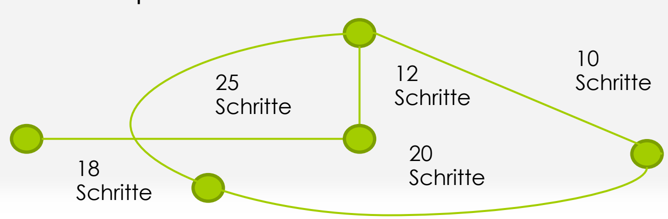
b) Versucht den kürzesten Weg in Form eines Rundgangs zu finden, wobei ihr am Marktplatz beginnt und wieder am Marktplatz endet. Entwickelt dabei unterschiedliche Strategien und vergleicht die Ergebnisse. (z.B. Es wird immer der Ort aufgesucht der der derzeitigen Sehenswürdigkeit am nächsten liegt) Welche Strategie ist die Beste?



Kurzer Einblick in die Graphentheorie

Definition: Ein Bild aus Punkten und Linien heißt Graph, wenn jede Linie genau zwei Punkte miteinander verbindet. Wir nennen die Linien auch Kanten und die Punkte Ecken.

Definition: Ein Graph, der Längenangaben enthält, heißt gewerteter Graph.



Rechnen wie die Großeltern

Ein bisschen Entspannung notwendig? Los geht‘s!

Aufgabe

1. Sucht euch einen Baum, der euch besonders gut gefällt ☺ (Vergesst nicht in eurer Lösung anzugeben welchen Baum ihr euch ausgesucht habt!)
2. Berechnet die Höhe des Baumes mit Hilfe eines Geodreiecks und der Strahlensätze. Beschreibt dabei euer Vorgehen in der Lösung mit Hilfe einer Skizze!
3. Bestimmt das Volumen des Stammes (Zylinder)!

ACHTUNG:
Leider hatten eure Großeltern noch keine Taschenrechner, sodass sie sich mit einem logarithmischen Rechenschieber helfen mussten. Das heißt, auch ihr müsst euer Ergebnis damit berechnen! Wie das funktioniert? Lest einfach die Anleitung (Einen Rechenschieber und die Anleitung findet ihr in der Mappe.)

Aufgabe

1. Warum kann die Multiplikationsaufgabe mit Hilfe einer Streckenaddition gelöst werden? Welche Idee/ welches Gesetz über Logarithmen verbirgt sich dahinter?
2. Formuliert eine Anleitung zur Division zweier Zahlen mit Hilfe des Rechenschiebers und benennt das Gesetz, das eurer Anleitung zu Grunde liegt!

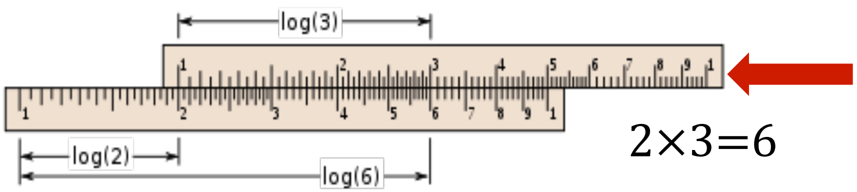
Rechenschieber

Die Bestandteile

Der Rechenstab, besteht aus einem festen Grundkörper, einer beweglichen Zunge und einem Läufer. Die herkömmlichen Rechenschieber bestehen aus diversen Skalen – K für Kubikzahlen, A für Quadratzahlen, ….
Wichtig für die Multiplikation und Division zweier Zahlen sind jedoch hauptsächlich die Grundskalen C und D.

Das Komma

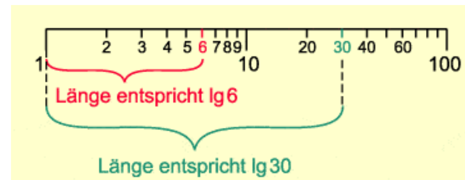
Die Grundskalen C und D sind eingeteilt von 1-10. Das bedeutet aber nicht, dass nur Rechnungen in diesem Intervall durchführbar sind. Diese Annahme ist falsch, da bei Rechnungen das Komma nicht miteinbezogen wird. Liest man beispielsweise den Wert 3 ab, so kann dieser auch 0,3; 300; 3000; … bedeuten. Es müssen also zunächst Überschlagsrechnungen angestellt werden, um die entsprechende Kommasetzung ausfindig zu machen.



$2 \times 3 = 6$

Die Skalen

Die Skalen des Rechenschiebers sind logarithmische Skalen, die durch die Funktion $y = \lg x$ beschrieben werden. Das bedeutet, dass der Zahlenwert 6 die Streckenlänge $\lg 6 \approx 0{,}7782$ hat. Logarithmen wachsen nicht proportional und somit sind auch logarithmische Skalen nicht proportional, d.h. die Abstände zwischen zwei benachbarten größer werdenden natürlichen Zahlen werden immer kleiner.



Die Multiplikation

Durch die geometrische Addition zweier Zahlen mit Hilfe der Skalen C und D erhält man das Produkt der beiden Zahlen, dank des Rechengesetzes für Logarithmen.

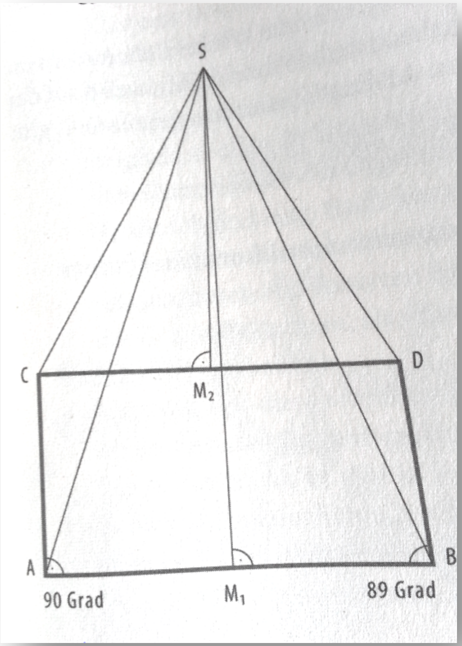
Zuerst wird die Anfangsmarkierung 1 der Skala C über den ersten Faktor auf der Skala D geschoben. Der Läufer wird nun über den zweiten Faktor auf der Skala C geschoben. Das Ergebnis wird an dieser Stelle auf der Skala D abgelesen.

Übersteigt das Produkt den Wert 10 , lässt sich das Ergebnis nicht auf diesem Wege berechnen, da das Ergebnis nicht mehr abgelesen werden kann. In diesem Fall wird nicht der Skalenanfang sondern der Endwert 10 von Skala C über den ersten Faktor auf der Skala D geschoben. Wie immer wird nun der Läufer über den zweiten Faktor geschoben und das Ergebnis auf der Skala D abgelesen.

Knobelei für unterwegs

Dies ist eine Aufgabe, mit der ihr Zusatzpunkte sammeln könnt, falls ihr mit den restlichen Aufgaben bereits fertig seid.

Ein Beweis dafür, dass 90 Grad gleich 89 Grad sind.



Aufgabe Wo liegt der Fehler?

Auf einer Strecke AB wird eine Strecke AC im rechten Winkel errichtet, rechts eine gleich lange Strecke BD im Winkel von 89 Grad. Es entsteht das etwas schiefe Viereck ABCD.

Nun werden auf AB und CD jeweils die Mittelsenkrechten errichtet. Weil AB und CD nicht parallel sind, sind auch diese Mittelsenkrechten nicht parallel, sie schneiden sich irgendwo in einem Punkt S.

Der Punkt S wird mit A, B, C und D verbunden, wie in der (nicht maßstabsgerechten) Zeichnung zu sehen ist.

Nun wird mit Kongruenzen argumentiert.

1. AS=BS, weil S auf der Mittelsenkrechten von AB liegt.
2. CS=DS, weil S auf der Mittelsenkrechten von CD liegt
3. Also ist das Dreieck ASC kongruent zu BSD, weil die beiden in allen drei Seiten übereinstimmen.
4. Also ist der Winkel CAS gleich dem Winkel DBS. Außerdem ist der Winkel SAM_1 gleich Winkel SBM_1, weil S auf der Mittelsenkrechten von AB liegt.

Zusammengenommen gilt:
$90° = CAS + SAM_1 = DBS + SBM_1 = 89°$