



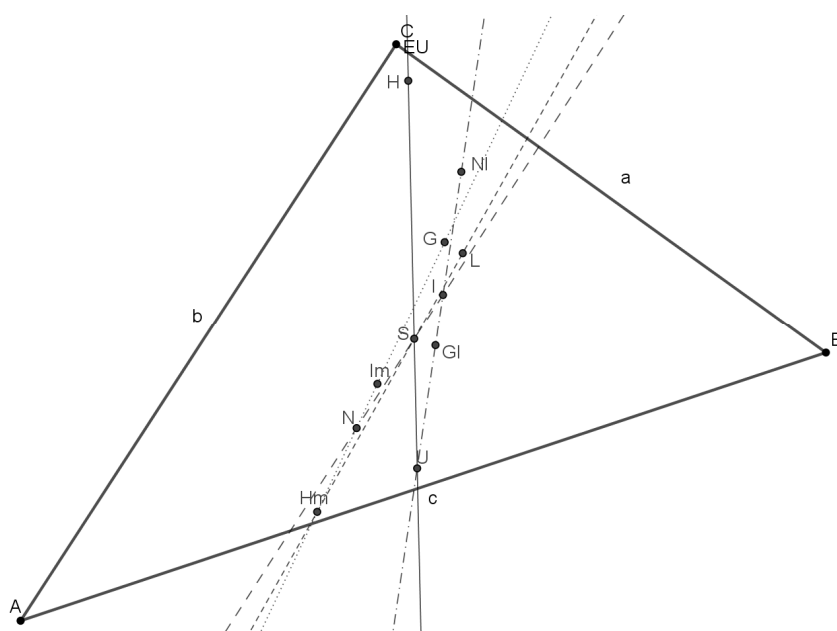
Математическая летопись ДЕСЯТОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБМЕНА

ЛИЦЕЙ «НАУКОВА ЗМІНА»
Киев, Украина

ГИМНАЗИЯ ДЛЯ ОСОБО ОДАРЁННЫХ ДЕТЕЙ
Швебиш Гмюнд, Германия

"Замечательные точки в треугольнике" И алгебраические поверхности в программе "SURFER"

25.06 – 09.07.2019 – украинская группа в Германии



Mathematische Chronik des 10. LGH - MATHE - SPRACH – AUSTAUSCHES

LANDESGYMNASIUM FÜR HOCHBEGABTE
Schwäbisch Gmünd, Deutschland

LYZEUM „NAUKOVA ZMINA“
Kiew, die Ukraine

"Wunderbare Punkte im Dreieck" und algebraische Flächen mit dem Programm "SURFER"

25.06 – 09.07.2019 - Aufenthalt der ukrainischen Gruppe in Deutschland

Дата: 26.06.19

Летописец: Yevdokiia

Математика в космонавтике

Конические сечения

Эллипс $\rightarrow$ орбиты, по которым движутся космические тела.

Можно доказать теорему, которая утверждает, что спутник может двигаться только по орбите, которая имеет форму конического сечения.

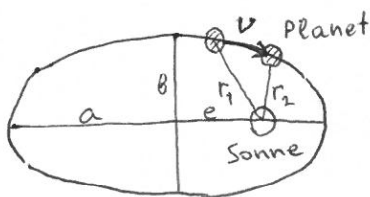
$$\left[\frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} = -\frac{\mu}{2a} \right] \quad \begin{array}{l} \text{Уравнение} \\ \text{Виз-Вива} \end{array}$$

r - расстояние до тела, вокруг которого вращается объект

a - ось орбиты

v - скорость тела

μ - гравитационная константа

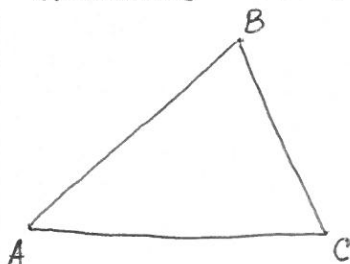
Замечательные точки треугольника

- Центр тяжести (пересечение медиан)
- Центр вписанной окружности (пересечение бисектрис)
- Ортоцентр (пересечение высот)
- Центр описанной окружности (пересеч. серединных перпендикуляров)

Точка Ферма

Сумма расстояний от этой точки до вершин треугольника минимальная

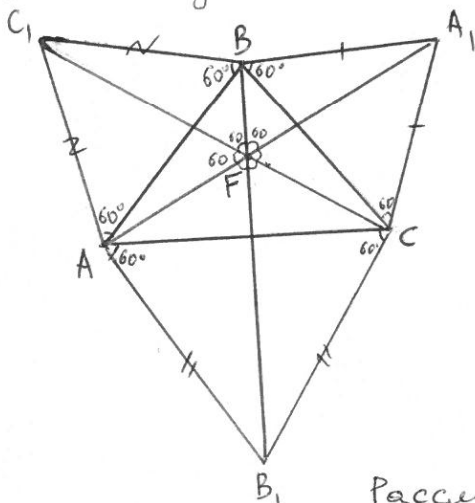
★ Таких точек 2 для треугольников, ^{все} углы которых меньше 120° .



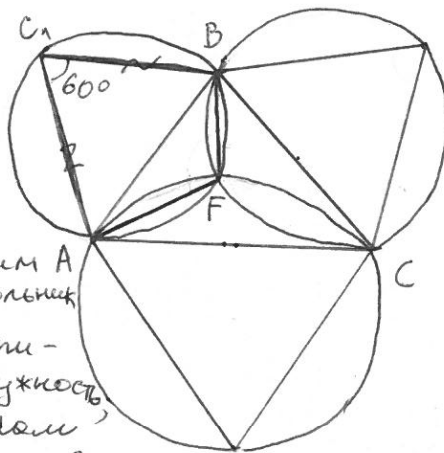
Дата: 26.06.19

Летописец: Yevdokiia

Дано: произвольный треугольник с углами меньше 120° . На его сторонах построены равносторонние треугольники. Доказать, что AA_1 , BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке.



Докажем через описанные окружности (они пересекаются в одной точке?)



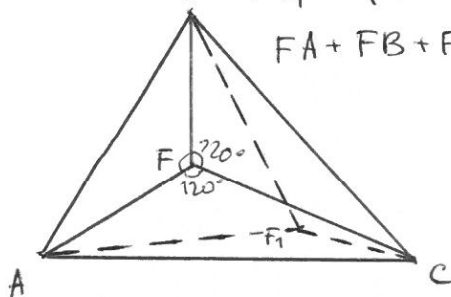
Рассмотрим ΔAC_1BF . Он вписан в окружность, а так как нам известно, что $\angle C_1 = 60^\circ$, то противоположный угол $\angle F = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$.

Аналогично доказываем для углов $\angle BFC$ и $\angle AFC$.

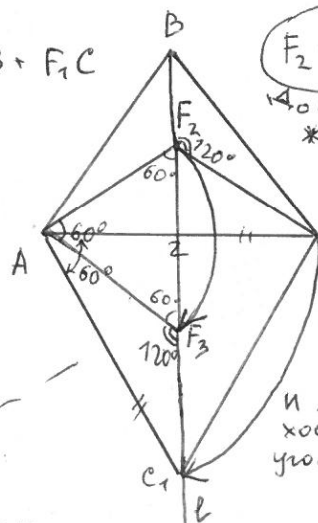
√2

В $\forall F_1 \in (\Delta ABC), F_1 \neq F$.

$$FA + FB + FC < F_1A + F_1B + F_1C$$



$F_1 \rightarrow$ произвольная точка



$$F_2C = F_3C_1$$

Доказать
* При переходе $F_2 \rightarrow F_3$, а $C \rightarrow C_1$
 $\Downarrow$
С отрезок F_2C переходит в F_3C_1 .

и $\angle BF_2C$ переходит в угол $\angle AF_3C_1$.

Мы показали, что для того, чтобы сумма отрезков до вершин была мин, углы $\angle BFC$, $\angle AFC$ и $\angle AFB$ должны быть по 120° .

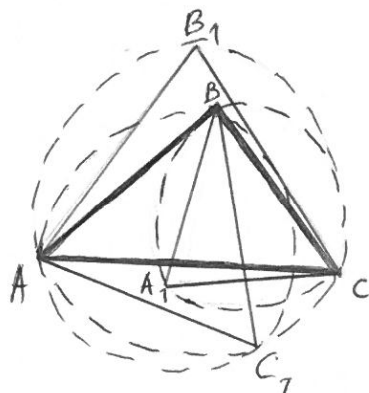
$$F_2A + F_2B + F_2C = F_2F_3 + F_2B + F_2C_1$$

$$(F_2A + F_2B + F_2C) \rightarrow B, F_2, F_3, C_1 \in l$$

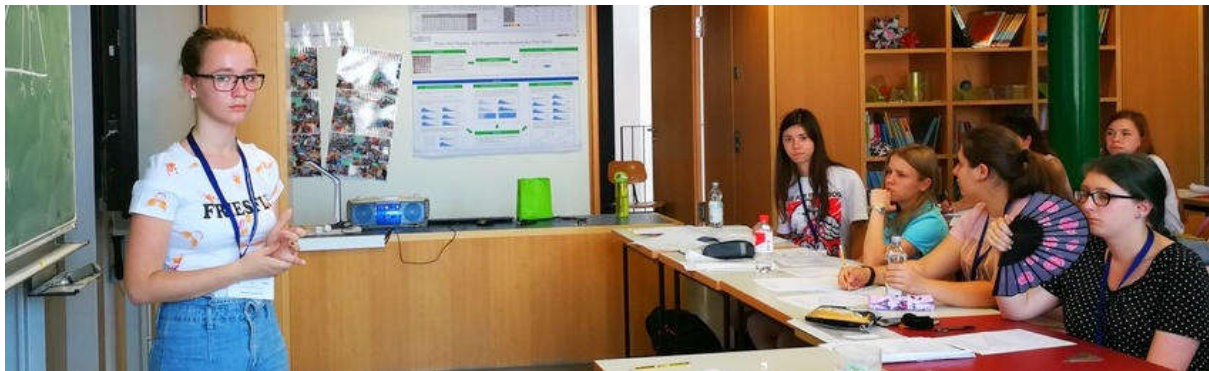
Дата: 26.06

Летописец: Yevdokiia

→ Точка Ферма 2 в треугольнике. Как найти вторую?



Теперь рисуем равносторонний треугольник внутри исходного Δ .



27.06.

„Es ist in der That bewunderungswürdig, dass eine so einfache Figur wie das Dreieck, so unerschöpflich an Eigenschaften ist“

A. L. CRELLE, 1821

I. Klassische Transversalenschnittpunkte - Merkwürdige Punkte im Dreieck

1. Schwerpunkt S - Schnittpunkt der Dreiecks Seitenhalbierenden.
2. Inkreismittelpunkt I - Schnittpunkt der Winkelhalbierenden.
3. Orthozentrum H - Schnittpunkt der Höhen.
4. Umkreismittelpunkt O - Schnittpunkt der Mittelsenkrechten.

II. Weitere Entwicklung ab Mitte des 17. Jahrhunderts.

1. Fermat - Punkt
2. Satz von CEVA

III. Weitere Entwicklung ab dem 18. Jahrhundert.

1. Satz von CARNOT
1. GERGONNE - Punkt G
2. NAGEL - Punkt N
3. Mittenpunkt M
4. SPIEKER - Punkt Sp
5. NAPOLEON - Punkt Nap
6. BROCARD - Punkte Br

IV. Isogonal konjugierte Punkte

1. Lemoinepunkt L - Schnittpunkt der Symmedianen. Isogonal konjugiert mit dem Schwerpunkt S.
2. Punkt Gl - isogonal konjugiert zum GERGONNE - Punkt G.
3. Punkt Nl - isogonal konjugiert zum Nagel Punkt N

V. Isotom - konjugierte Punkte.

1. Punkt Im - isotom - konjugiert dem Innkreismittelpunkt I.
2. Punkt Hm AntiOrthozentrum - isotom - konjugiert dem Orthozentrum H.

VI. Besondere Geraden.

1. Eulersche Gerade
2. Nadelsche Gerade



27.06.

VII. Aus „Die Entwicklung der neueren Dreiecksgeometrie“ von Peter Baptist

1. **Pierre de FERMAT** (1601 - 1665).

Erst Mitte des 17. Jahrhunderts wurde die Liste der vier klassischen Transversalenschnittpunkte um einen weiteren besonderen Punkt erweitert. Am Schluß des vierten Teils seiner „Abhandlung über Maxima und Minima“ stellt Pierre de FERMAT die Aufgabe, den Punkt kleinster Entfernungssumme von den drei Punkten zu finden (S.33).

2. **Giovanni CEVA** (1647 - 1734) .

Im Jahre 1678 erschien in Mailand die Schrift „De lineis rectis se invicem secantibus, statico construction“

3. **Graf Lazare Nicolas Marguerite Carnot** war französische Offizier, Mathematiker und Politiker. * 13. Mai 1753 in Nolay, Burgund, heute Département Côte - d'Or; † 2. August 1823 in Magdeburg)4. **Christian Heinrich von NAGEL** (1803 - 1882). Lehrer in Tübingen und Ulm5. **Karl Wilhelm FEUERBACH** (1800 - 1834) Gymnasiallehrer in Erlangen und Hof.6. **Pierre Rene' Jean - Baptiste Henri BROCARD** (1845 - 1922) französischer Offizier und Ingenieur.

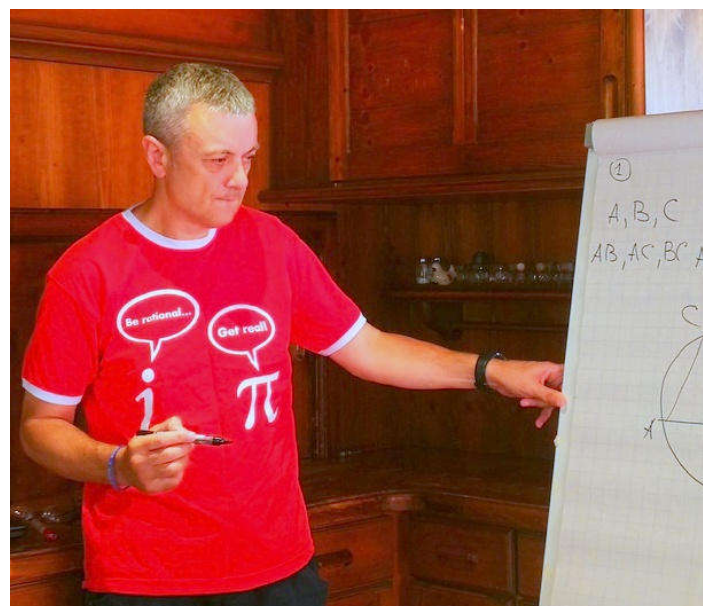
Die nach dem BROCARD genannten Punkte wurden „lange vor ihm bereits von CRELLE entdeckt“

7. **August Leopold CRELLE** (1780 - 1855)

Herausgeber des „Journals für die reine und angewandte Mathematik“

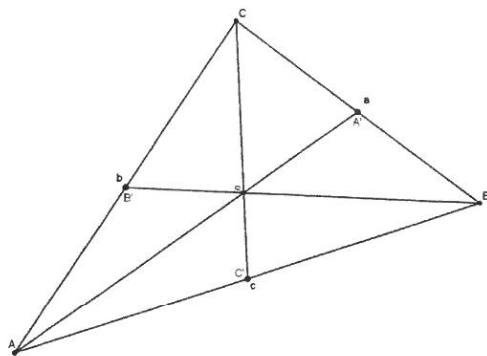
8. **Joseph Diaz GERGONNE** (19.06. 1771 Nancy - 04.05. 1859 Montpellier)

Herausgeber „Annales de mathematiques pures et appliquees“

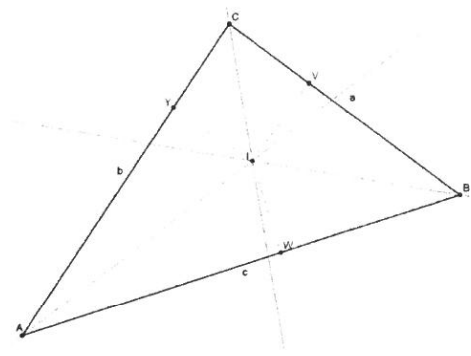


27.06.

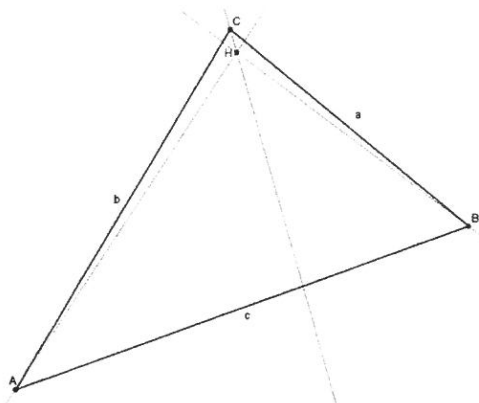
I. Klassische Transversalenschnittpunkte - Merkwürdige Punkte im Dreieck



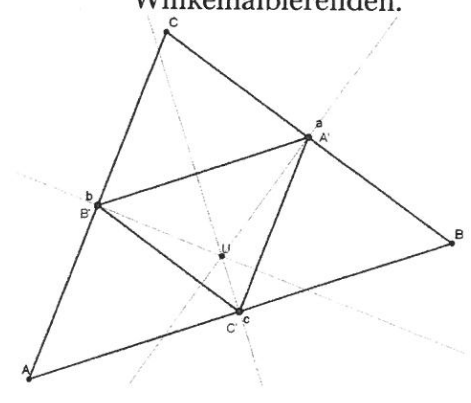
1. Schwerpunkt S - Schnittpunkt der Dreiecks Seitenhalbierenden.



2. Inkreis Mittelpunkt I - Schnittpunkt der Winkelhalbierenden.



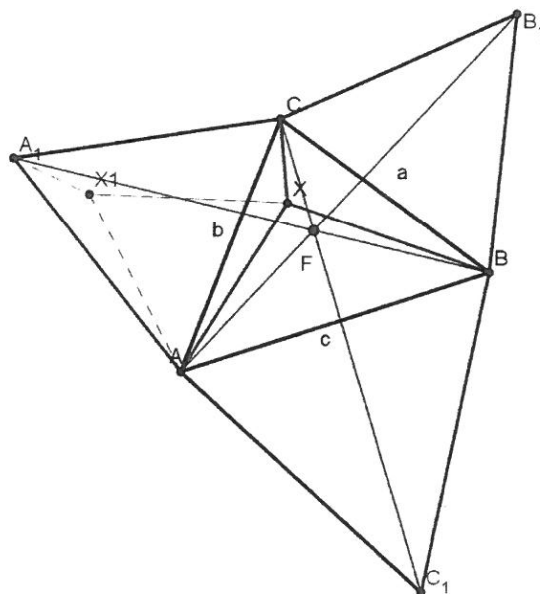
3. Orthozentrum H - Schnittpunkt der Höhen.



4. Umkreismittelpunkt O - Schnittpunkt der Mittelsenkrechten - Schnittpunkt der Höhen des Mittendreiecks.

II. Weitere Entwicklung ab Mitte des 17. Jahrhunderts.

1. **Fermat - Punkt F** - Der Punkt der minimalen Summe der Abstände zu den Dreieckseckpunkten.



27.06.

2. Satz von CEVA.**Fall des Inneren Punktes.**

Die Punkte A_1 , B_1 und C_1 liegen entsprechend auf den Seiten BC , AC und AB eines Dreiecks ABC .

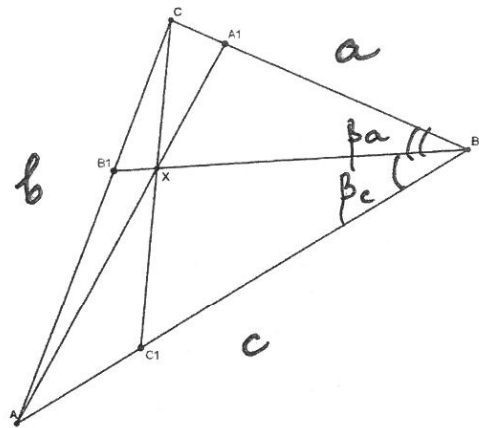
Die folgende zwei Behauptungen sind äquivalent:

(a) Die Geraden AA_1 , BB_1 und CC_1 schneiden sich in einem inneren Punkt des Dreiecks ABC .

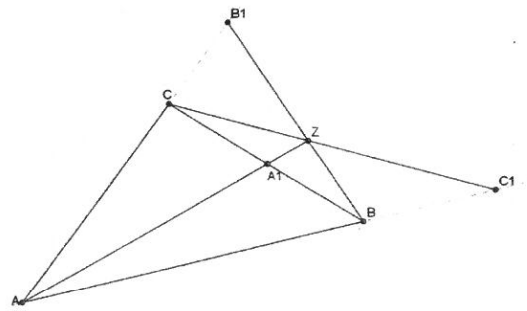
(b) $\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1$ (CEVA - Bedingung)

(a) $\Rightarrow$ (b) Crellesche Beweis mit Flächeninhalten der Dreiecke ist bekannt

(b) $\Rightarrow$ (a) indirekter Beweis ist auch bekannt

**Fall des Äußeren Punktes.**

Der Satz von CEVA bleibt gelten, wenn der Punkt Z außerhalb des Dreiecks liegt, d.h. zwei der Punkten A_1 , B_1 und C_1 liegen auf den Verlängerungen der Dreiecksseiten.

**Trigonometrische Form.**

*доказать с помощью
теоремы синусов!*

(D/3)

$$\frac{\sin(\angle ACC_1)}{\sin(\angle BCC_1)} \cdot \frac{\sin(\angle CBB_1)}{\sin(\angle ABB_1)} \cdot \frac{\sin(\angle BAA_1)}{\sin(\angle CAA_1)} = 1$$

$$\frac{\sin \gamma_b}{\sin \gamma_a} \cdot \frac{\sin \beta_a}{\sin \beta_c} \cdot \frac{\sin \delta_c}{\sin \delta_b} = 1.$$

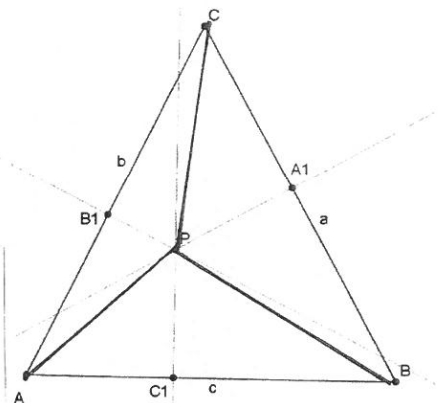
III. Weitere Entwicklung ab dem 18. Jahrhundert.**1. Satz von CARNOT**

Drei Orthogonalen zu den jeweiligen Seiten eines Dreiecks ABC schneiden sich in einem Punkt P genau dann, wenn die folgende Bedingung erfüllt ist:
 $|AB_1|^2 + |CA_1|^2 + |BC_1|^2 = |AC_1|^2 + |BA_1|^2 + |CB_1|^2$,
 wobei A_1 , B_1 , C_1 die Schnittpunkte der Orthogonalen mit den Dreiecksseiten oder ihrer Verlängerungen sind.

Пусть A_1, B_1, C_1 - не середины сторон, но условие выполнено. Тогда перпендикуляры пересекаются в одной точке и

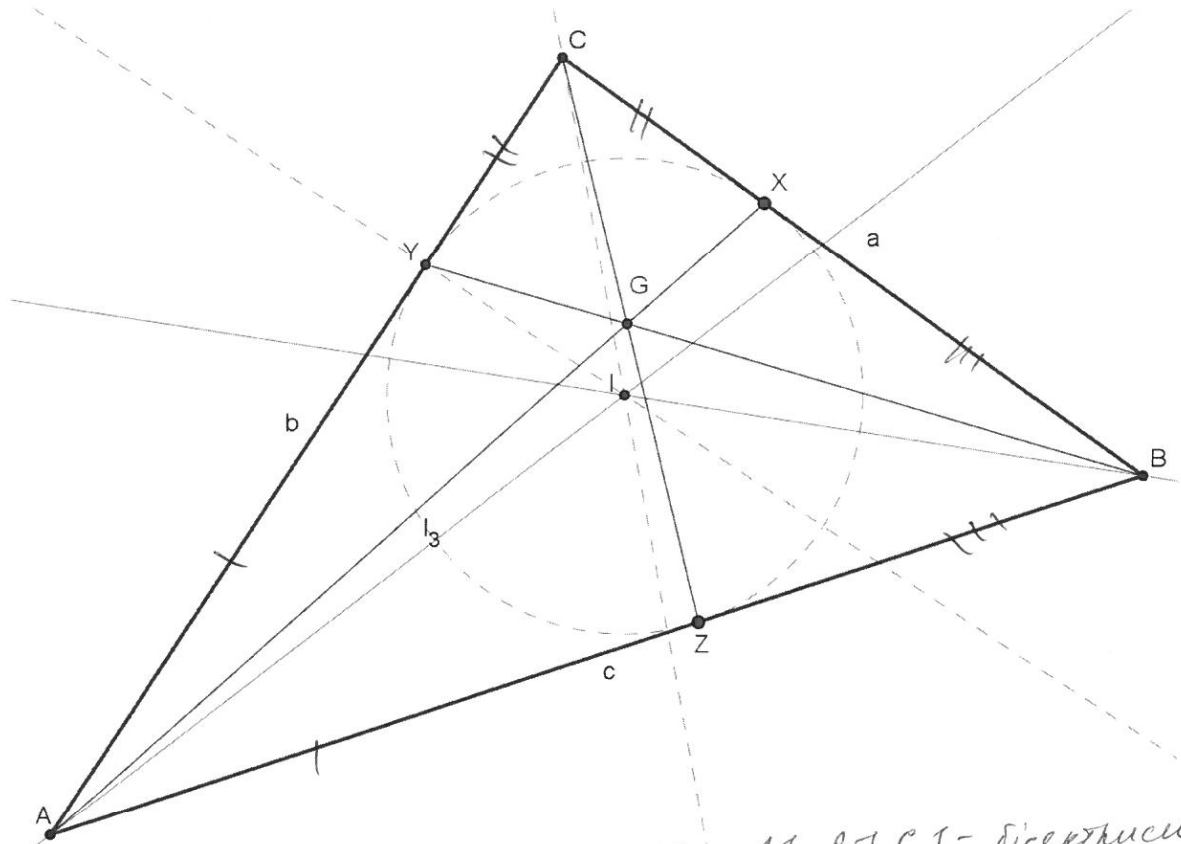
наоборот. Док-во следует из теоремы Пифагора.

Aufgabe: Beweise den Satz von CARNOT mithilfe des Satzes des Pythagoras.

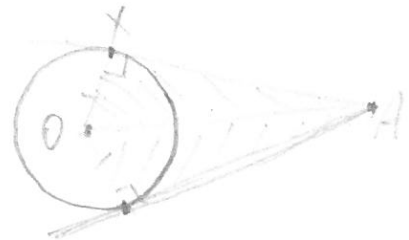


27.06.

2. GERGONNE- Punkt G – der Schnittpunkt der Ecktransversalen zu den Berührungspunkten des Innkreises.

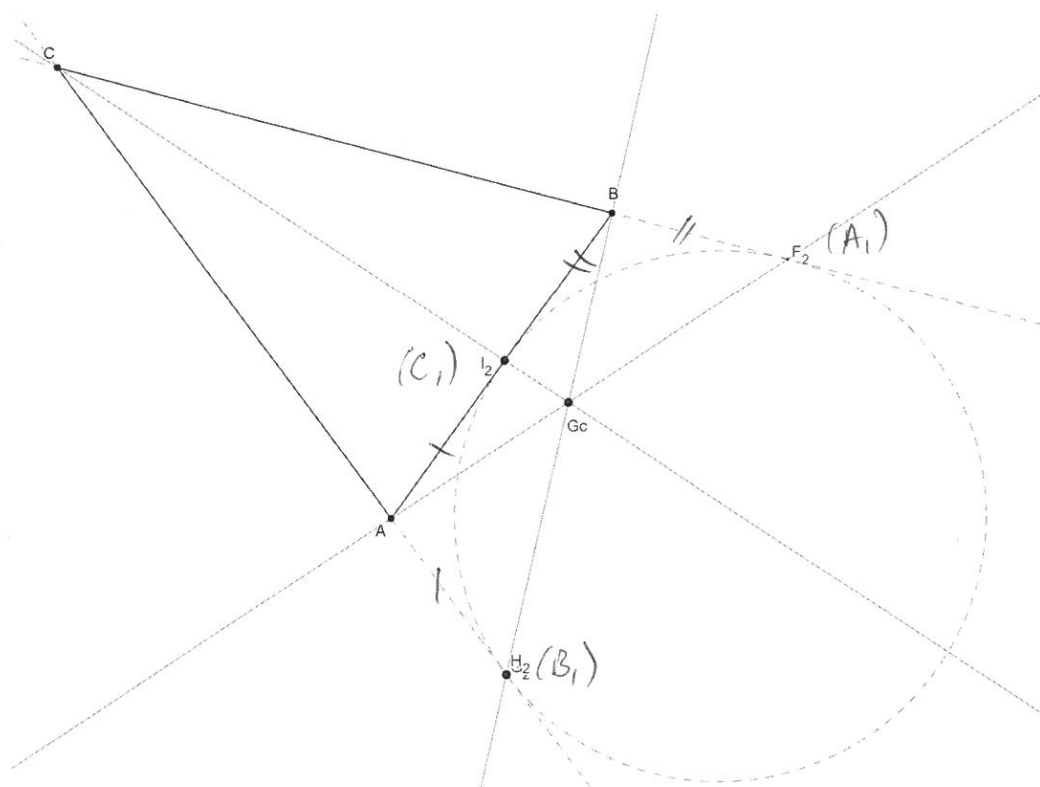


Дано: $\triangle ABC$, I – центр вписанного круга, AI, BI, CI – бисектрисы
 Дов-ти: AX, BY, CZ перетин в одній точці
 Дов-че: $AY = AZ = x$
 $CY = CX = y$
 $BX = BZ = z$ за теоремою дотичних
 $\frac{x}{y} \cdot \frac{y}{z} \cdot \frac{z}{x} = 1$. (т. Чеви)



27.06.

Äußerer GERGONNE-Punkt G_c



$$AB_1 = AC_1 = a$$

$$BC_1 = BA_1 = b$$

$$CA_1 = CB_1 = c$$

T. Yeban

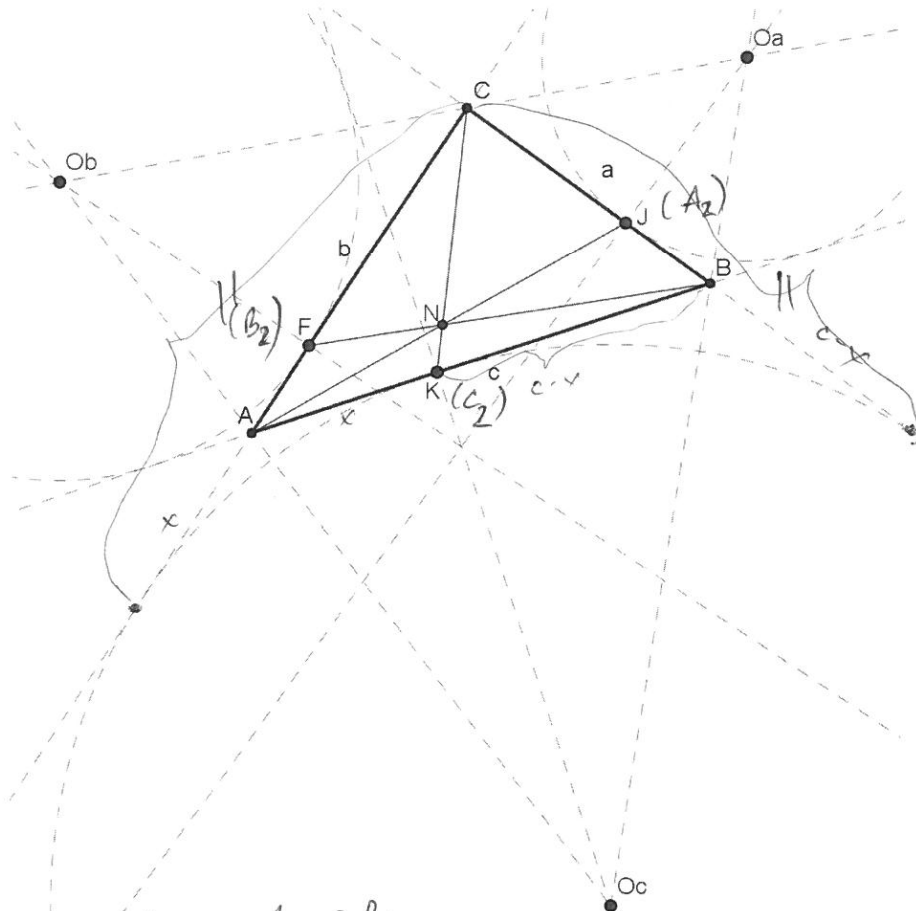
$$\frac{a}{c} \cdot \frac{c}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1.$$

Аналогично что G_a и G_b



27.06.

3. NAGEL Punkt N- der Schnittpunkt der Ecktransversalen zu den Berührungspunkten der Ankreise.



Дано: $\triangle ABC$, τ, C_2 , τ, A_2 , τ, B_2
 Дов-ти: CK, AJ, BF перетин в одній точці (т. N - точка Негеле)
 CC_2, AA_2, BB_2

Дов-ме: Нехай $AC_2 = x$, тоді $BK = c - x$

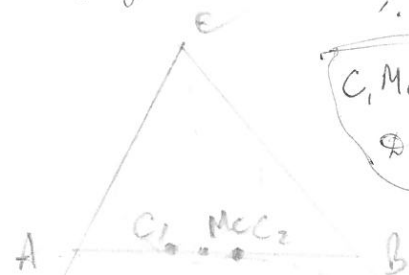
$$b + x = a + c - x$$

$$x = \frac{a + c - b}{2}$$

$$x = \frac{a + c + b - 2b}{2}$$

$$x = p - b = AC_2; \quad C_2B = c + b - p$$

Аналогічно знаходимо всі довж. відрізків і використовуємо т. Чеви.



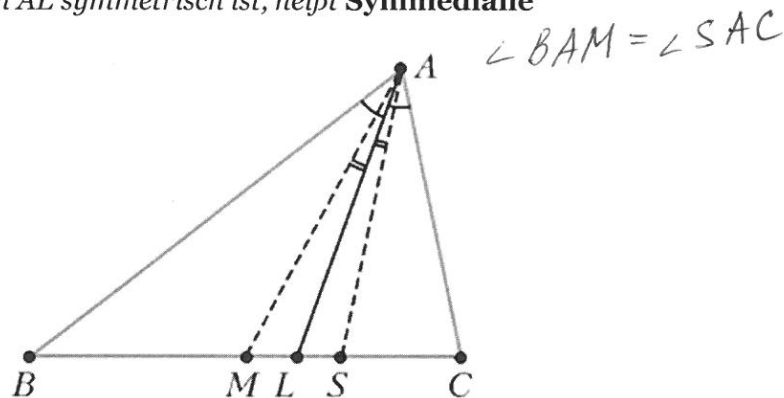
27.06

Определения/ Definitionen

1. **Симедиана.** Рассмотрим треугольник ABC , его медиану AM и биссектрису AL . Пусть прямая AS симметрична прямой AM относительно прямой AL (точка S лежит на отрезке BC). Тогда отрезок AS называют **симедианой** треугольника ABC . Иногда симедианой называют прямую, содержащую отрезок AS .

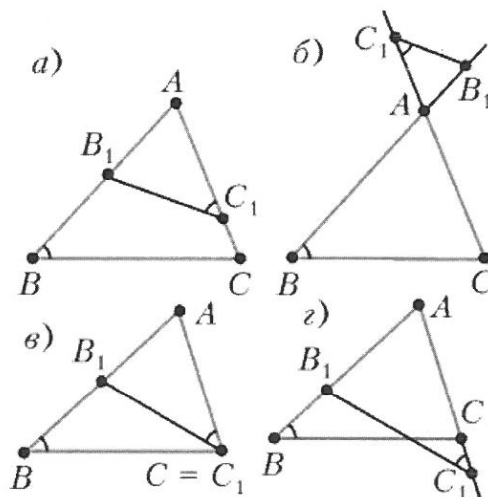
Симедиана — чевиана треугольника, луч которой симметричен лучу медианы относительно биссектрисы угла, проведенной из той же вершины.

Symmediane. Die Strecke AS , die zur Seitenhalbierenden AM bezüglich der Winkelhalbierenden AL symmetrisch ist, heißt **Symmediane**



2. **Антипараллельность.** Пусть точки B_1 и C_1 лежат на прямых AB и AC . Говорят, что отрезки B_1C_1 и BC антипараллельны (относительно пары прямых AB и AC , или относительно угла BAC), если $\angle AC_1B_1 = \angle ABC$. Возможны различные случаи расположения антипараллельных отрезков ($a - z$).

Antiparallelität. Die Strecken B_1C_1 und BC heißen **antiparallel** bezüglich der geraden AB und AC , wenn $\angle AC_1B_1 = \angle ABC$



27.06.

Факты и свойства / Sätze

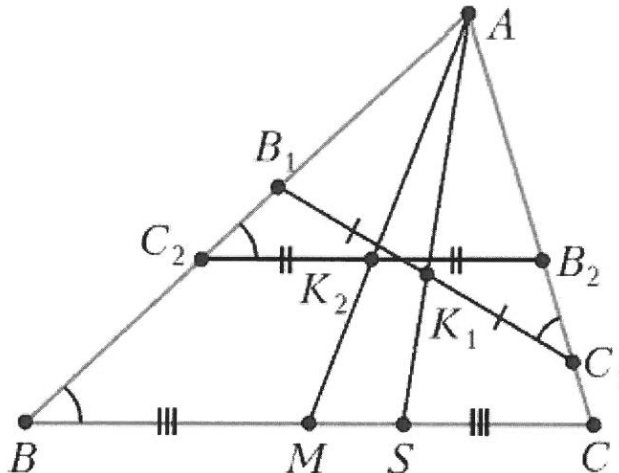
1. В треугольнике ABC проведен отрезок B_1C_1 , антипараллельный стороне BC, с концами на прямых AB и AC соответственно. Прямая AS содержит симедиану треугольника ABC тогда и только тогда, когда она делит B_1C_1 пополам.

✓ дано

Г. дов-ти

Die Strecke B_1C_1 ist antiparallel zur BC bezüglich AB und AC.

Die Strecke AS ist genau dann die Symmediane, wenn sie die Strecke B_1C_1 halbiert.



Дано: $B_1K_1 = K_1C_1$, AS .

Дов-ти:

Дов-ме: Нехай B_2C_2 — образ B_1C_1 при симетрії відносно бісектриси $B_2C_2 \parallel BC$ ($\angle AC_2B_2 = \angle ABC$ при січній AB).
 Нехай образ т. K_1 — т. K_2 ; т. K_2 — середина B_2C_2 , тому це симетричне друк.
 Проведемо пряму AK_2 . Нехай $AK_2 \cap BC = M$
 $BM = MC$ ($\triangle C_2AB_2 \sim \triangle BAC$) $\Rightarrow AM$ — медіана $\Rightarrow AS$ — симедіана.



27.06.

2. Пусть точка S лежит на стороне BC треугольника ABC. Тогда эквивалентны следующие условия:

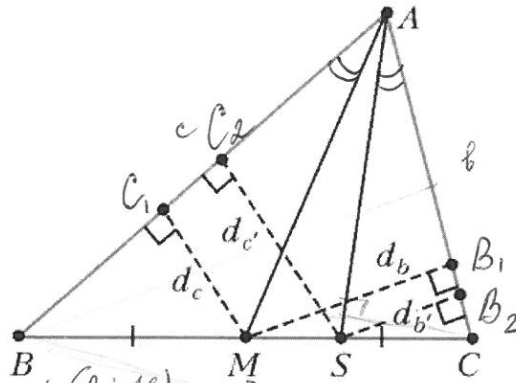
Der Punkt S liegt auf der Seite BC des Dreiecks ABC. Dann sind die folgende Bedingungen äquivalent:

$$\begin{array}{llll} \text{a)} \frac{d(S; AB)}{d(S; AC)} = \frac{c}{b} & \text{б)} \frac{S_{ABS}}{S_{ACS}} = \frac{c^2}{b^2} & \text{в)} \frac{d(B; AS)}{d(C; AS)} = \frac{c^2}{b^2} & \text{г)} \frac{BS}{CS} = \frac{c^2}{b^2} \end{array}$$

д) AS – симедиана / Symmediane

В данном случае используются стандартные обозначения для сторон треугольника $AB=c$, $AC=b$. Расстояние от точки X до прямой l будем обозначать $d(X, l)$.

Дано: $\triangle ABC$, AM – медиана
AS – симедиана



$$\text{a)} \frac{S_{ABS}}{S_{ACS}} = \frac{BS}{CS} = \frac{d(B; AS)}{d(C; AS)} = \frac{c^2}{b^2}$$

Поскольку AM – медиана, $S_{ABM} = S_{AMC}$

$$\frac{1}{2} c \cdot d_c = \frac{1}{2} b \cdot d_b \Rightarrow \frac{c}{b} = \frac{d_b}{d_c}$$

$$\triangle MAB_1 \sim \triangle SAC_2 \quad (1)$$

$$\triangle MAC_1 \sim \triangle SAB_2 \quad (2)$$

$$\Rightarrow \frac{d_{b'}}{d_c} = \frac{AS}{AM} \quad (2); \quad \frac{AS}{AM} = \frac{d_c'}{d_b} \quad (1)$$

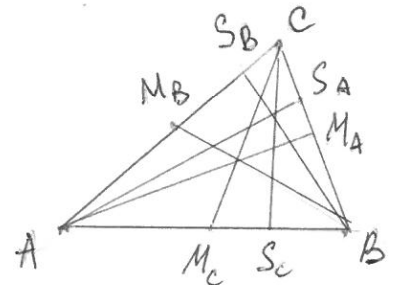
$$\text{г)} \frac{BS}{CS} = \frac{S_{ABS}}{S_{ACS}} = \frac{c \cdot d_c'}{b \cdot d_b'} = \frac{c^2}{b^2} \quad \left(\text{поскольку } \frac{d_c'}{d_b'} = \frac{c}{b} \right)$$

$$\frac{d_c'}{d_b} = \frac{d_b'}{d_c} \Rightarrow \frac{d_c}{d_b} = \frac{d_b'}{d_c'} = \frac{b}{c}$$

$$\text{б)} \frac{d(B; AS)}{d(C; AS)} = \frac{S_{ABS}}{S_{ACS}} = \frac{c^2}{b^2}$$

Дов-ти: все симедианы перескаются в одной точке

$$\frac{AS_c}{S_c B} \cdot \frac{CS_b}{S_b A} \cdot \frac{BS_a}{S_a C} = \frac{c^2}{b^2} \cdot \frac{a^2}{c^2} \cdot \frac{b^2}{a^2} = 1$$



27.06.

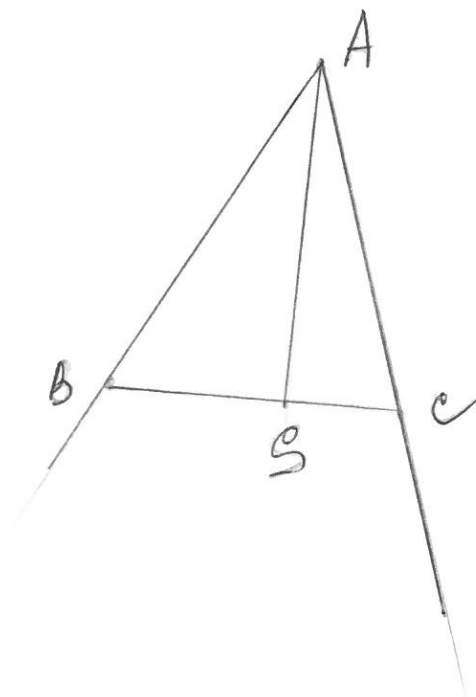
3. Пусть точка S лежит внутри угла BAC. Тогда эквивалентны следующие условия:

Der Punkt S liegt innerhalb des Winkels BAC. Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

a) Прямая AS содержит симедиану / AS liegt auf der Symmediane.

$$\text{б) } \frac{d(S; AB)}{d(S; AC)} = \frac{c}{b} \quad \text{в) } \frac{S_{ABS}}{S_{ACS}} = \frac{c^2}{b^2} \quad \text{г) } \frac{d(B; AS)}{d(C; AS)} = \frac{c^2}{b^2}$$

(Выводится из Факта 2)



27.06.

4. Касательные к описанной окружности треугольника ABC в точках B и C пересекаются в точке P, тогда прямая AP содержит симедиану AS. *← дов-ти*

Die Tangenten zum Umkreis des Dreiecks ABC in den Punkten B und C schneiden sich im Punkt P. Dann enthält die Strecke AP die Symmediane AS.

Дов-ти: $\frac{S_{ABP}}{S_{ACP}} = \frac{C^2}{B^2}$ *Зоведено*

$$\frac{S_{ABP}}{S_{ACP}} = \frac{AB^2}{AC^2}$$

$$\frac{S_{ABP}}{S_{ACP}} = \frac{AB \cdot BP \cdot \sin \angle ABP}{AC \cdot CP \cdot \sin \angle ACP}$$

$$\sin \angle ABP = \sin \angle ACP$$

$$\frac{S_{ABP}}{S_{ACP}} = \frac{AB \cdot \sin \angle KBA}{AC \cdot \sin \angle LCA}$$

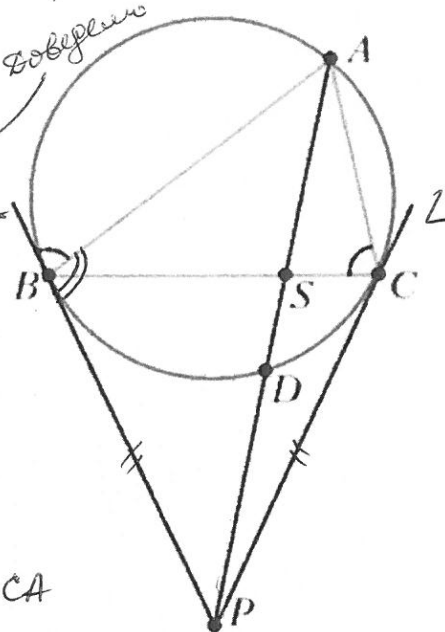
$$\angle KBA = \frac{1}{2} \angle A = \angle LCA$$

Аналог. $\angle LCA = \angle CBA$

$$\frac{S_{ABP}}{S_{ACP}} = \frac{AB \cdot \sin \angle ACB}{AC \cdot \sin \angle CBA}$$

3 теореме синусів

$\Rightarrow AS$ — симедиана



$$\frac{\sin \angle ACB}{\sin \angle CBA} = \frac{BA}{AC}$$

єдине $\frac{S_{ABP}}{S_{ACP}} = \frac{AB^2}{AC^2} \Rightarrow$

15/12

5. Если отрезок B_1C_1 антипараллелен стороне BC, то $B_1C_1 \perp OA$, где O — центр описанной окружности. (Вспомогательная задача к 10).

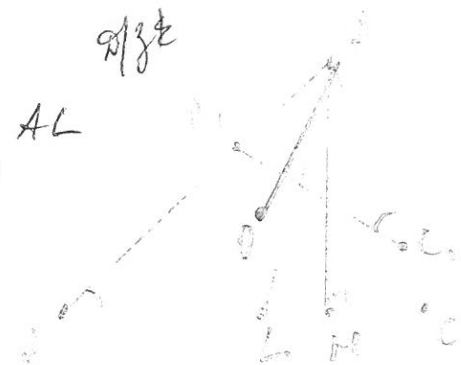
Wenn B_1C_1 antiparallel zur BC bezüglich AB und AC, dann ist $B_1C_1 \perp OA$, wobei o der Mittelpunkt des Umkreises des Dreiecks ABC ist.

Дов-ти: $OA \perp B_1C_1$

Дов-ти: Нех. AL — вис. $\triangle ABC$
 AH — висота $\triangle ABC$

Доведено, що при симетрії відносно AL образ точки O буде накладати AH

д/з



16/13

27.06.

Точка Лемуана/ Lemoinepunkt

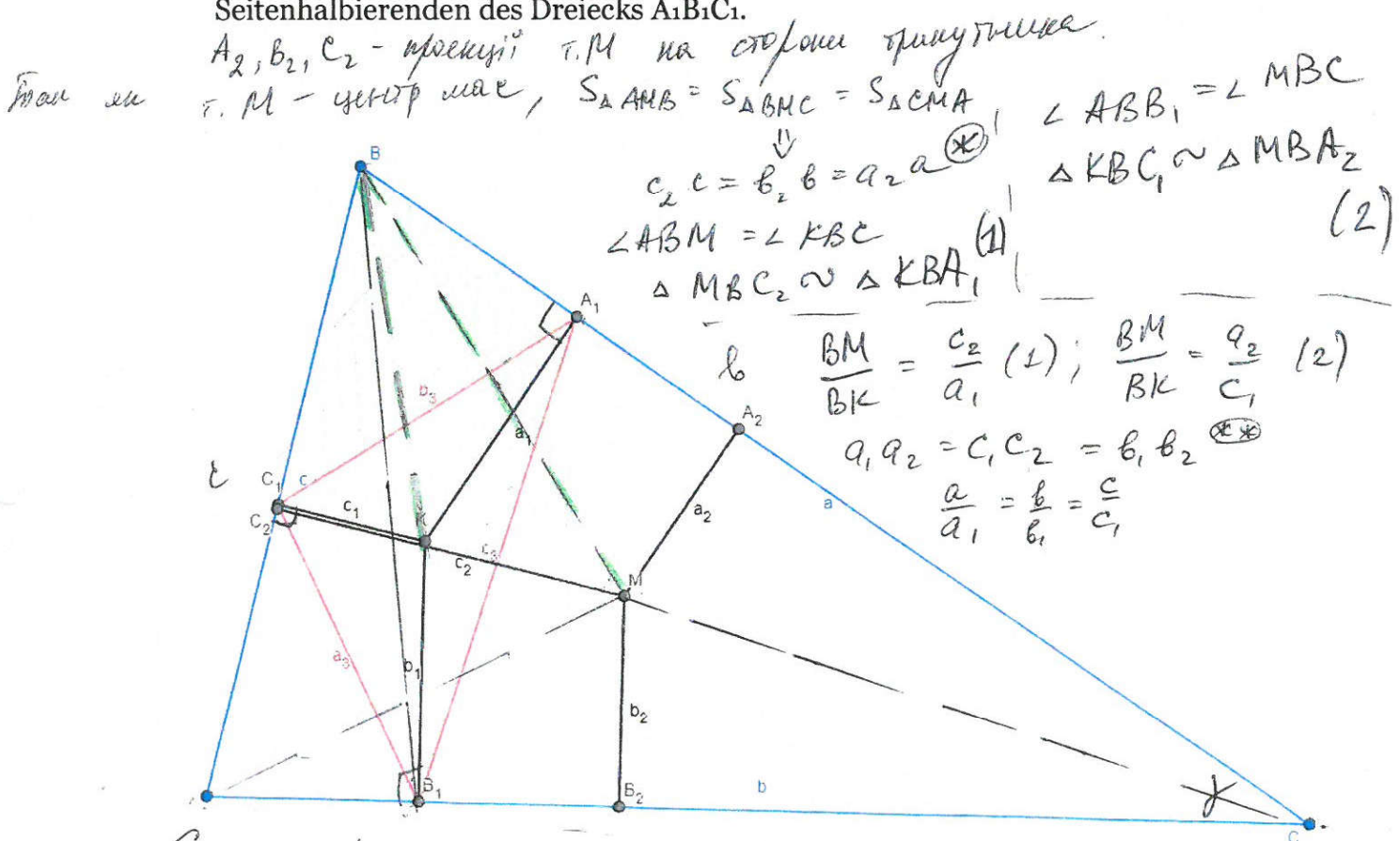
У точки Лемуана существует два равносильных определения:

- точка пересечения прямых, соединяющих каждую вершину треугольника с точками пересечения касательных к описанной окружности, проведённых из двух других вершин.
- точка пересечения симедиан.

Definition.

- Lemoinescher Punkt ist der Schnittpunkt der Symmedianen.
 - Der Schnittpunkt der Verbindungsgeraden einer Dreiecksecke mit dem Schnittpunkt der Tangenten zum Umkreis an den anderen Dreiecksecken.
1. Пусть A_1, B_1 и C_1 — проекции точки Лемуана K на стороны треугольника ABC , тогда K — точка пересечения медиан треугольника $A_1B_1C_1$.

Seien A_1, B_1 und C_1 — die Projektionen des Lemoineschen Punktes K auf die Seiten des Dreiecks ABC . Dann ist M — der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden des Dreiecks $A_1B_1C_1$.



$$S_{\triangle A_1KB_1} = \frac{1}{2} \cdot \sin \angle A_1KB_1 \cdot a_1 \cdot b_1 = \frac{1}{2} \sin \gamma \cdot a_1 \cdot b_1 = \frac{a_1 b_1 c}{4R}$$

$\angle A_1KB_1 = 180^\circ - \gamma$ ($\angle KA_1C = 90^\circ$, $\angle KB_1C = 90^\circ$)

$$S_{\triangle B_1KC_1} = \frac{b_1 c_1 a}{4R}$$

$$S_{\triangle C_1KA_1} = \frac{c_1 a_1 b}{4R}$$

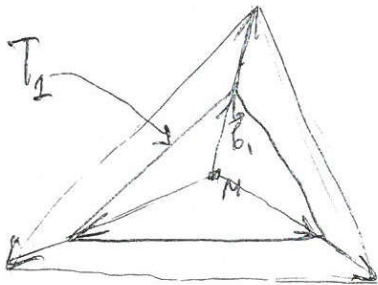
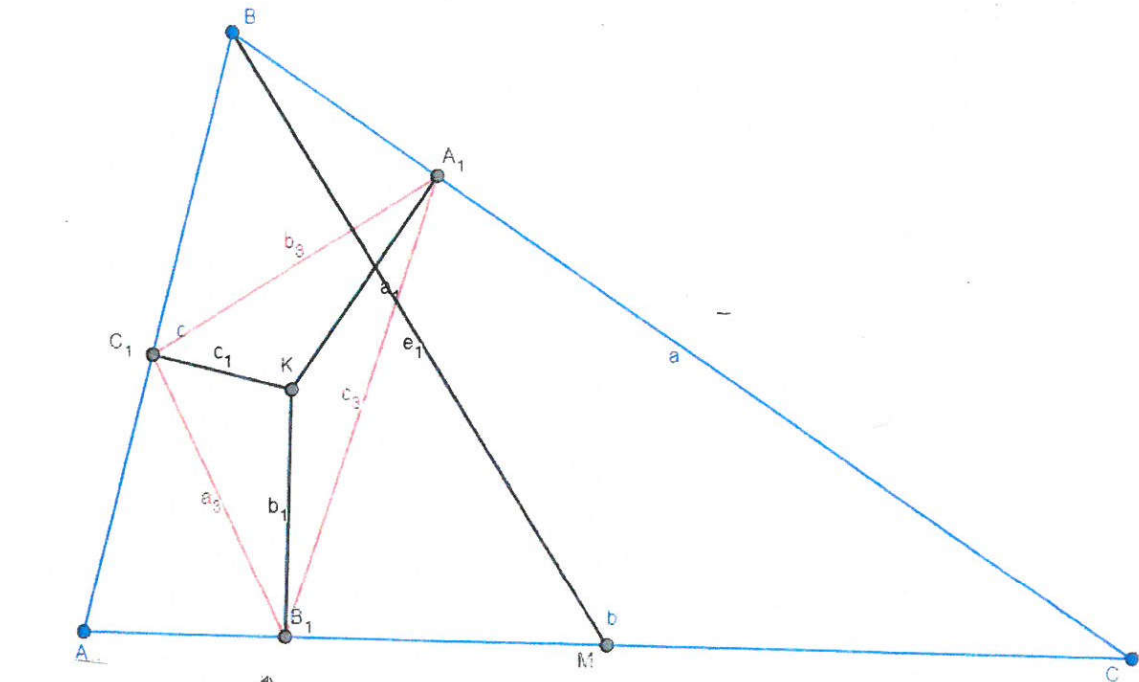
$$S_{\triangle A_1KB_1} = S_{\triangle B_1KC_1} = S_{\triangle C_1KA_1} \Rightarrow \text{т. К — точка пересечения медиан } \triangle A_1B_1C_1$$

17/14

27.06.

2. Пусть A_1 , B_1 и C_1 — проекции точки Лемуана K треугольника ABC на стороны BC , CA и AB , тогда медиана BM треугольника ABC перпендикулярна прямой A_1C_1 .

Seien A_1 , B_1 und C_1 — die Projektionen des Lemuaneschen Punktes K auf die Seiten des Dreiecks ABC . Dann ist die Seitenhalbierende BM orthogonal zur Strecke A_1C_1 .



стороны ΔT_2

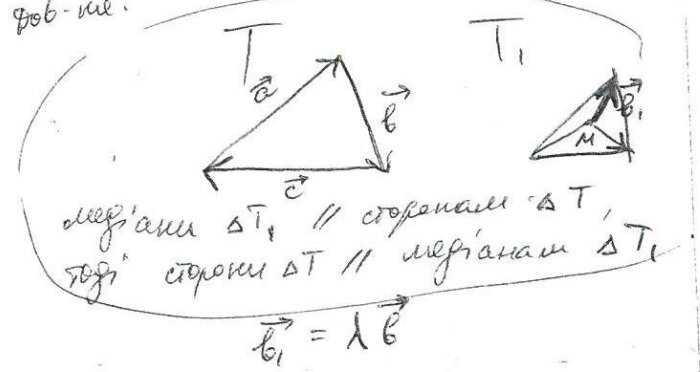
$$\begin{aligned} \vec{b} - \vec{a} \\ \vec{a} - \vec{c} \\ \vec{c} - \vec{b} \end{aligned}$$

медианы ΔT

$$\begin{aligned} \frac{\vec{b} - \vec{a}}{2} \\ \frac{\vec{a} - \vec{c}}{2} \\ \frac{\vec{c} - \vec{b}}{2} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ все линейно
сторонам ΔT_2

Т.М — середина AC
Дов-ти: $BM \perp A_1C_1$
Дов-ти.



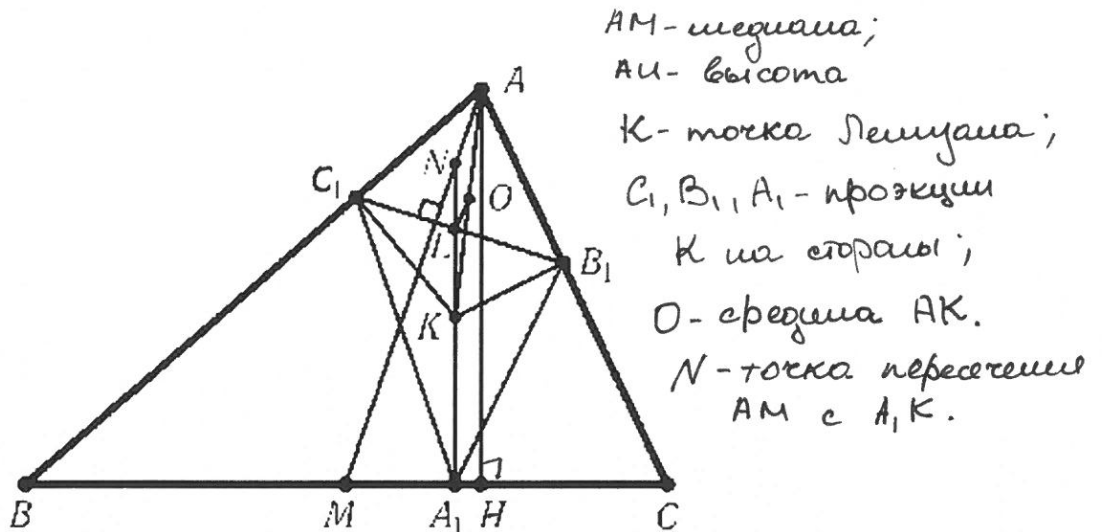
Дата: 28.06.2019

Летописец: Била Анастасия

3. (Третье определение точки Лемуана). Прямые, соединяющие середины сторон треугольника с серединами соответствующих высот, пересекаются в точке Лемуана.

^{1,2}
(6,7 используются как вспомогательные задачи у этой)

(Dritte Definition des Lemoineschen Punktes). Die Verbindungsgeraden der Seitenmitten mit den Mittenpunkten der entsprechenden Höhen schneiden sich im Lemoineschen Punkt.



На самостоятельное!

$AM \perp C_1B_1$; C_1AB_1K - впис.
 $C_1L = LB_1$
 $OL \perp B_1C_1$
 $OL \parallel AM$
 $NL = LK$

$$A_1K = 2KL$$

$$KN = KA_1$$



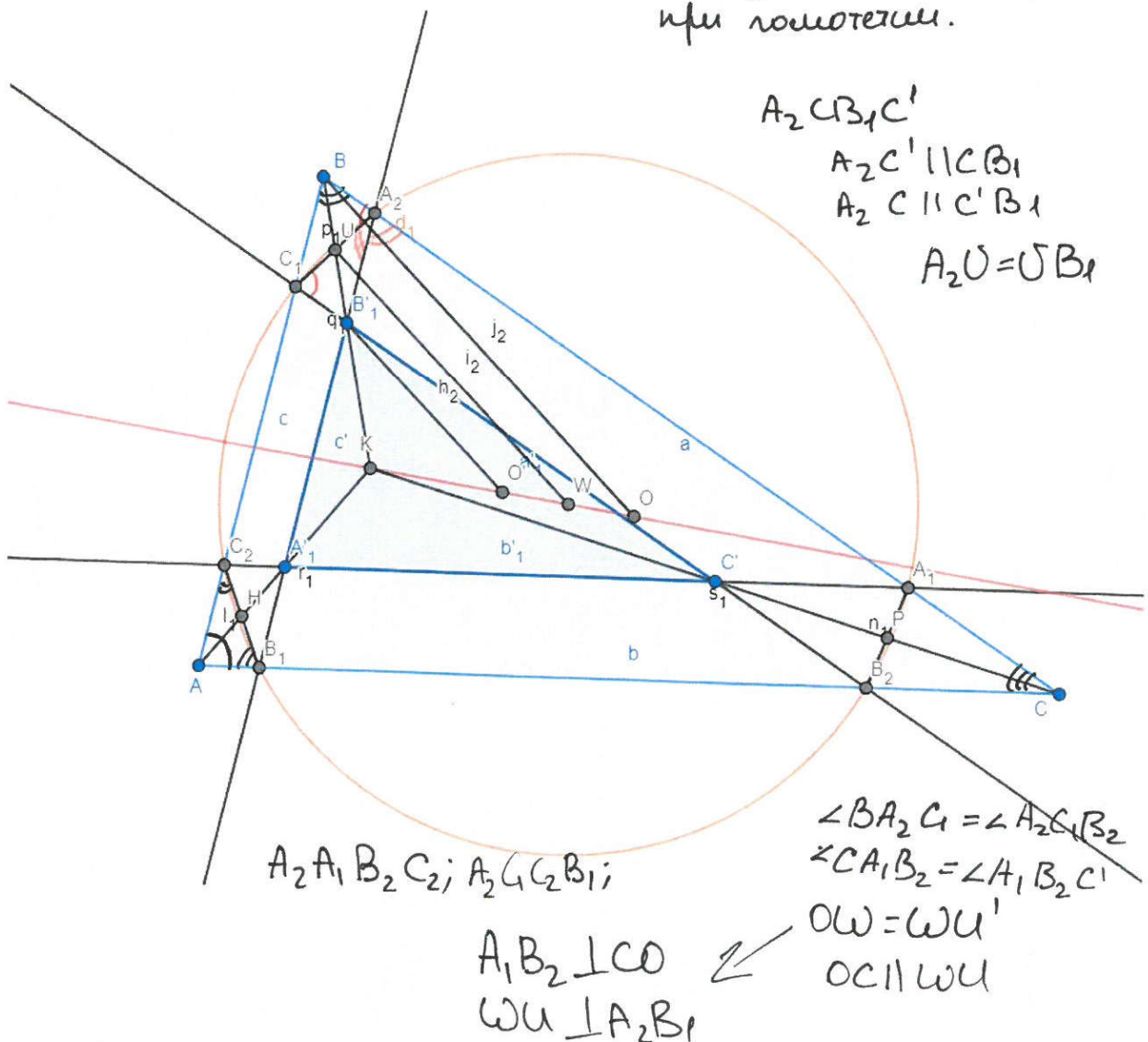
28.06.

Била Анастасия

4. Точки A_1 и A_2 , B_1 и B_2 , C_1 и C_2 лежат на сторонах BC , CA , AB треугольника ABC , если эти точки являются точками пересечения сторон треугольника ABC с продолжениями сторон треугольника $A'B'C'$, полученного из треугольника ABC при гомотетии с центром в точке Лемуана K , то точки $A_1, B_2, B_1, C_2, C_1, A_2$ лежат на одной окружности (окружность Тукера).

Das Dreieck $A'B'C'$ entsteht aus dem Dreieck ABC durch eine Zentrische Streckung mit dem Streckzentrum im Lemoineschen Punkt K . Die Schnittpunkte $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ der Verlängerungen der Seiten des Dreiecks $A'B'C'$ mit den Seiten des Dreiecks ABC liegen auf einem Kreis (Tuckerkreis)

$A'B'C'$ - треугольник полученный при гомотетии.

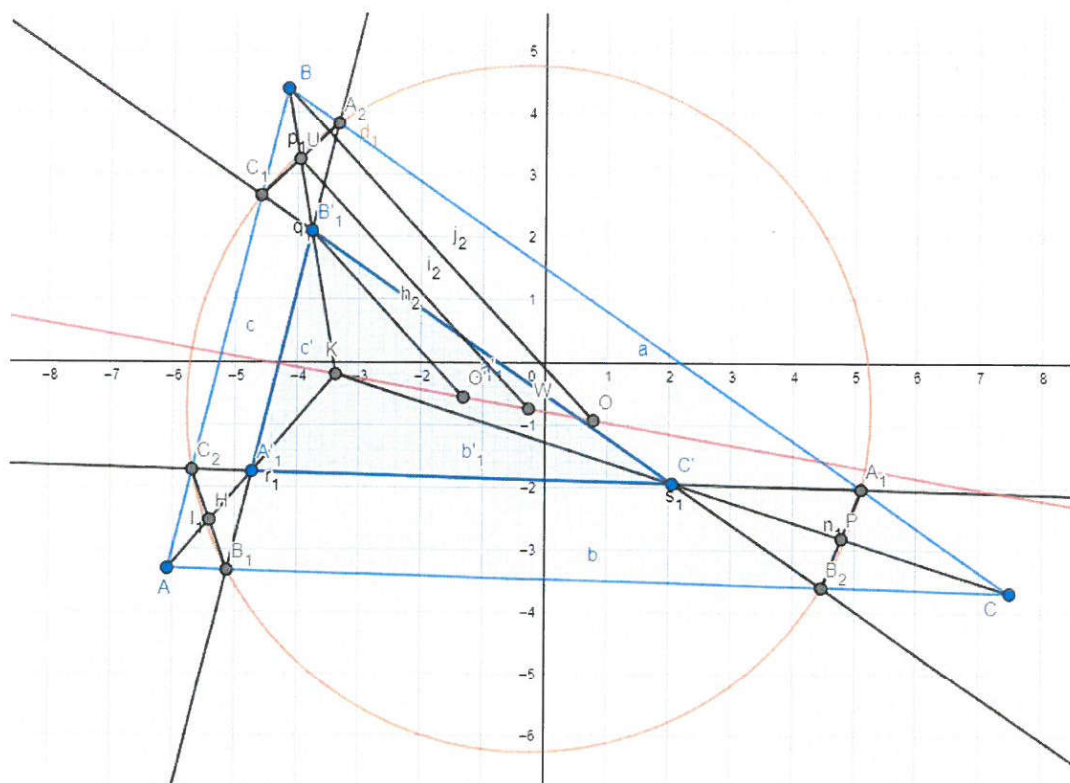


28.06.

Била Анастасия

5. Центр окружности Тукера лежит на прямой KO , где K — точка Лемуана, O — центр описанной окружности.

Der Mittelpunkt des Tuckerkreises liegt auf der Geraden KO , mit K Lemoineschen Punkt und O der Mittelpunkt des Umkreises des Dreiecks ABC .



Дата: 30.06.19

Летописец: Anastasiia Adamchuk

Гоманівські трикутники і точки Гоманівського

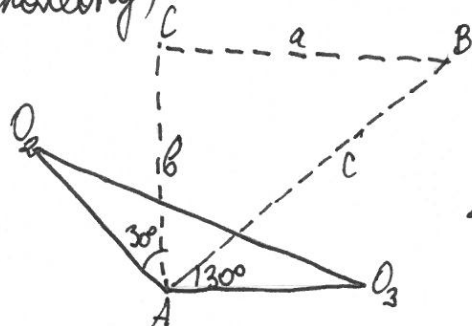
побудова:

1) на кожній стороні довільного $\triangle ABC$ будемо рівносторонні трикутники зовні, отримуючи точки A_1, B_1, C_1

2) O_1, O_2, O_3 — центри цих трикутників

3) A_1O_1, B_1O_2 і C_1O_3 перетинаються в 1 точці, це центр описаного кола

$\triangle O_1O_2O_3$ — рівносторонній, його називають зовнішнім Гоманівським трикутником, доведена прилежить Гоманівську



довести, що $\triangle O_1O_2O_3$
рівносторонній

$$\angle O_2AO_3 = \alpha + 60^\circ$$

$$AO_2 = \frac{b}{\sqrt{3}} \quad AO_3 = \frac{c}{\sqrt{3}}$$

$$O_2O_3^2 = \frac{b^2}{3} + \frac{c^2}{3} - 2 \cdot \frac{bc}{3} \cos(\alpha + 60^\circ)$$

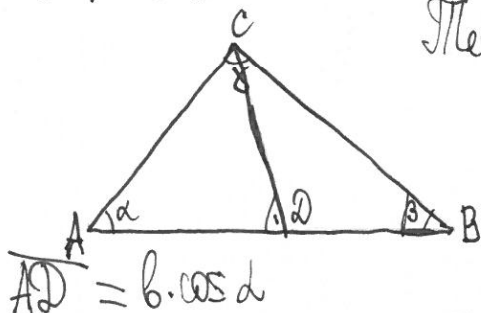
(за теоремою косинусів)

$$6 \cdot O_2O_3^2 = 2b^2 + 2c^2 - 4bc \cos(\alpha + 60^\circ)$$

Теорема косинусів

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$



$$AD = b \cdot \cos \alpha$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

Дата: 30.06.19

Летописец: Anastasiia Adamchuk

$$6 \overline{O_1 O_3}^2 = 2b^2 + 2c^2 - 4bc \cos(\alpha + 60^\circ)$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \sin \beta \cdot \cos \alpha$$

$$\cos(\alpha + 60^\circ) = \cos \alpha \cdot \cos 60^\circ - \sin \alpha \cdot \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \cos \alpha - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \alpha$$

$$6 \overline{O_2 O_3}^2 = 2b^2 + 2c^2 - 2bc \cos \alpha + 2\sqrt{3} bc \sin \alpha = b^2 + c^2 + (b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha) + 4\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} bc \sin \alpha = a^2 + b^2 + c^2 + 4\sqrt{3} (ABC)$$

$$\overline{O_2 O_3} = \overline{O_2 O_1} = \overline{O_1 O_3} \Rightarrow \text{трикутник рівносторонній}$$

$$6 \overline{O_1 O_2}^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 4\sqrt{3} (ABC)$$

$$6 \overline{L_A L_B}^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 4\sqrt{3} (ABC)$$

Знайти різницю площ зовнішнього і внутрішнього Лангмювських трикутників

$$(\overline{O_1 O_2 O_3}) - (\overline{L_A L_B L_C}) = ?$$

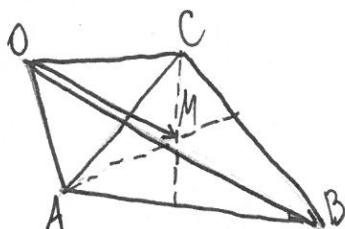
$$\frac{\sqrt{3}}{4} \overline{O_1 O_2}^2 - \frac{\sqrt{3}}{4} \overline{L_A L_B}^2$$

$$= (ABC)$$

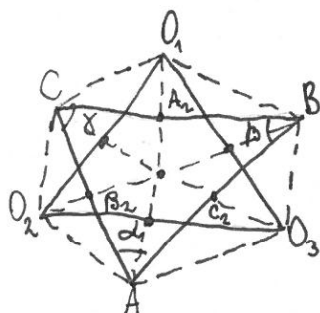
$$(ABC) = \frac{1}{2} a \cdot h_a = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin \gamma = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$$

$$a = b$$

$$\gamma = 60^\circ$$



$$\vec{OM} = \frac{1}{3} (\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC})$$



$$\frac{O_2X}{XO_3} \cdot \frac{O_3Y}{YO_1} \cdot \frac{O_1Z}{ZO_2} = ?$$

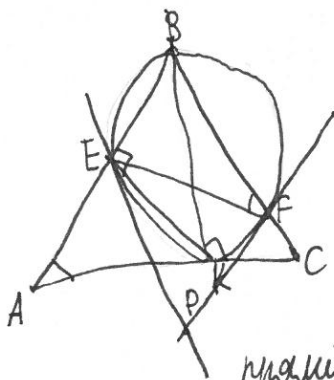
$$\frac{AC_2}{C_2B} \cdot \frac{BA_2}{A_2C} \cdot \frac{CB_2}{B_2A} = \frac{b \sin(\alpha + 30^\circ)}{a \sin(\beta + 30^\circ)}$$

$$\frac{c \cdot \sin(\beta + 30^\circ)}{b \cdot \sin(\gamma + 30^\circ)} \cdot \frac{a \cdot \sin(\gamma + 30^\circ)}{c \cdot \sin(\alpha + 30^\circ)} = 1$$

$$\frac{CB_2}{O_2A} = \frac{(O_2CB)}{(O_2AB)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot O_2C \cdot a \cdot \sin(\gamma + 30^\circ)}{\frac{1}{2} \cdot O_2A \cdot c \cdot \sin(\alpha + 30^\circ)} = \frac{a \cdot \sin(\gamma + 30^\circ)}{c \cdot \sin(\alpha + 30^\circ)}$$

$$\frac{AC_2}{C_2B} = \frac{(O_3AC)}{(O_3BC)} = \frac{b \cdot \sin(\alpha + 30^\circ)}{a \cdot \sin(\beta + 30^\circ)}$$

$$\frac{BA_2}{A_2C} = \frac{(O_1AB)}{(O_1AC)} = \frac{c \cdot \sin(\beta + 30^\circ)}{b \cdot \sin(\gamma + 30^\circ)}$$



Дано: в $\triangle ABC$ на высоте BK как на диаметре построили круг S , который пересекает стороны AB и BC в точках E и F соответственно. Доказано, что эти точки лежат на одной прямой.

Доказать, что их точка пересечения P лежит на прямой, которая содержит медиану AK $\triangle ABC$, проведенную из B .

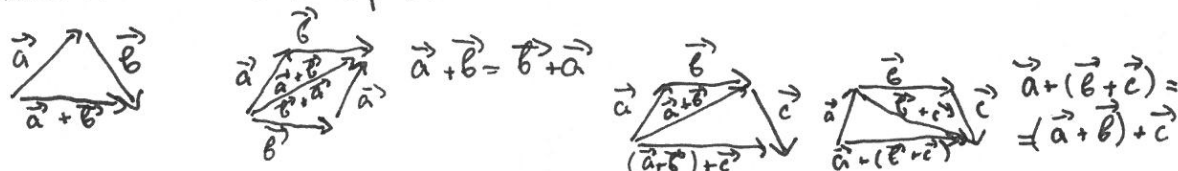
- решение: 1) BP — медиана в $\triangle BEF$
 2) EF антипараллельна AC
 3) $\angle BAK = \angle EKB = \angle EFB$

Дата: 01.07.19

Летописец: Lera Kovalenko

Бариецентрические координаты
 - нужны для того, чтобы узнавать расположение
 замечательных точек треугольника.
 - основываются на законе Архимеда (про рычаг)

Сложение векторов:



Умножение вектора на число:

$$k \cdot \vec{a}, k \in \mathbb{R}$$

$$1) k > 0: k \cdot \vec{a} \uparrow \vec{a} \quad 2) k < 0: k \cdot \vec{a} \downarrow \vec{a}$$

$$|k \cdot \vec{a}| = |k| \cdot |\vec{a}| \quad |k \cdot \vec{a}| = |k| \cdot |\vec{a}|$$

$$k \cdot (l \cdot \vec{a}) = (k \cdot l) \cdot \vec{a}$$

$$k(\vec{a} + \vec{b}) = k \cdot \vec{a} + k \cdot \vec{b}$$

Закон Архимеда (на языке векторов):



$$m_1 r_1 = m_2 r_2$$

$$|m_1 \cdot \vec{r}_1| = |m_2 \cdot \vec{r}_2|$$

$$m_1 \vec{r}_1 = -m_2 \vec{r}_2$$

$$m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 = 0$$

Материальная точка - точка, которая имеет массу,
 Aksiомы бариецентрических координат:

A0: каждое конечное число материальных точек
 обладает центром масс

A1: центр масс одной точки это она сама.

A2: центр масс двух материальных точек
 определяется по закону Архимеда

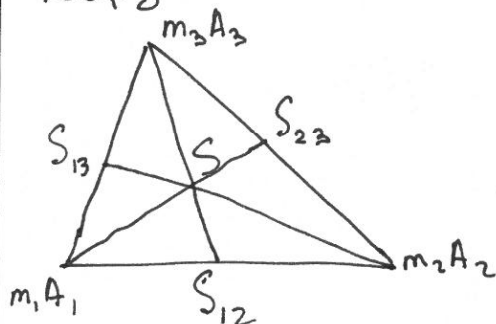
A3: центр масс системы не изменится, если
 выкинуть некоторые точки и вместо них
 вставить их центр масс с массой, которая
 равна сумме масс выкинутых точек.

$$S\{m_1 A_1, m_2 A_2, \dots, m_n A_n\} = S\{S\{m_1 A_1, \dots, m_k A_k\} (m_1 + m_2 + \dots + m_k), \dots, m_n A_n\}$$

Дата: 01.07.19

Летописец: LERA

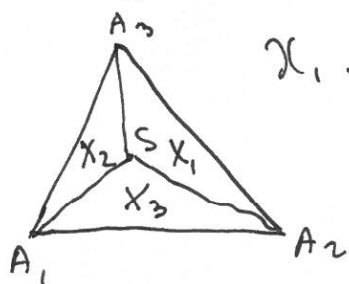
3 числа (массы вершин треугольника) задают 1 точку. Эти числа называют барицентрическими координатами.



$$m_1 \cdot \overline{A_1 S_{12}} = m_2 \cdot \overline{S_{12} A_2}$$

$$\frac{A_1 S_{12}}{S_{12} A_2} = \frac{m_2}{m_1} = \frac{(A_1 A_3 S_{12})}{(S_{12} A_3 A_2)} = \frac{(A_1 S S_{12})}{(S_{12} S A_2)} = \frac{(A_1 S A_3)}{(A_2 S A_3)}$$

Получается, что $m_1 : m_2 : m_3 = (A_2 S A_3) : (A_1 S A_3) : (A_1 S A_2)$



X_1, X_2, X_3 - площади треугольников

$$S(X_1 : X_2 : X_3)$$

Для точки S вне треугольника одна из площадей будет отрицательной.

$$\vec{CP} = \alpha \vec{CA} + \beta \vec{CB}$$

$$\vec{CM} = \alpha \vec{CA}$$

$$\vec{CN} = \beta \vec{CB}$$

$$\vec{OP} - \vec{OC} = \alpha(\vec{OA} - \vec{OC}) + \beta(\vec{OB} - \vec{OC})$$

$$\vec{P} - \vec{C} = \alpha(\vec{a} - \vec{c}) + \beta(\vec{b} - \vec{c})$$

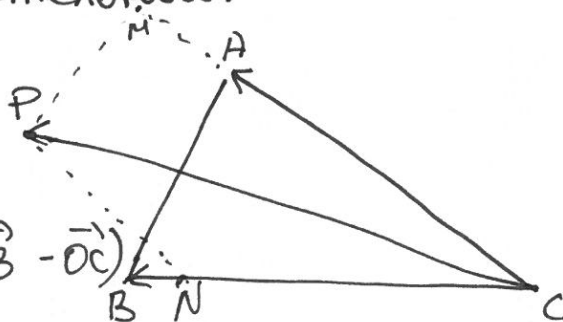
$$\vec{P} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b} + (1 - \alpha - \beta) \vec{c}$$

$$\beta = 1 - \alpha - \beta \quad (\alpha + \beta + \gamma = 1 \text{ (нормированные координаты)})$$

$$\vec{P} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b} + \gamma \vec{c}$$

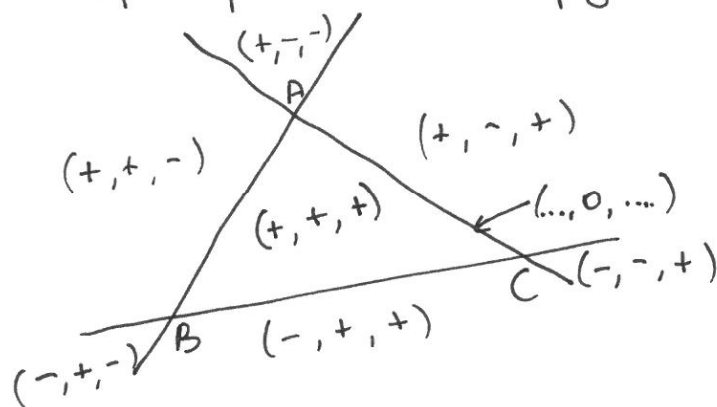
α, β, γ - барицентрические координаты точки P

$$P(\alpha : \beta : \gamma)$$



Дата: 01.07.19

Летописец: LERA

Знаки нормированных координат ($x + y + z = 1$)

Барцентрические координаты вершин:

$$A(1:0:0)$$

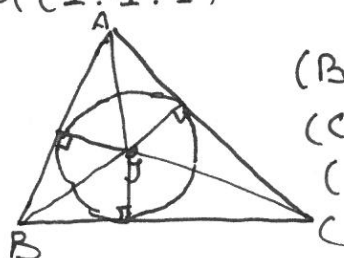
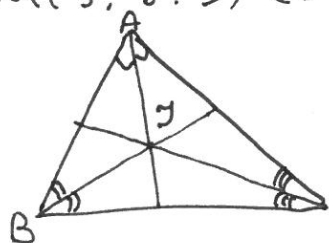
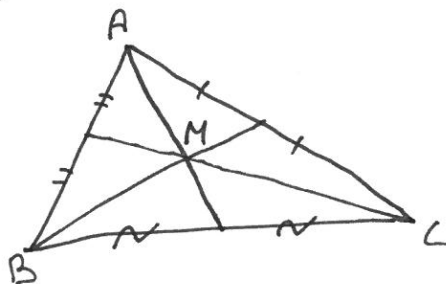
$$B(0:1:0)$$

$$C(0:0:1)$$

$$(BMC) = (CMA) = (AMB)$$

$$\mathcal{M}((BMC):(CMA):(AMB))$$

$$\mathcal{M}\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow \mathcal{M}(1:1:1)$$

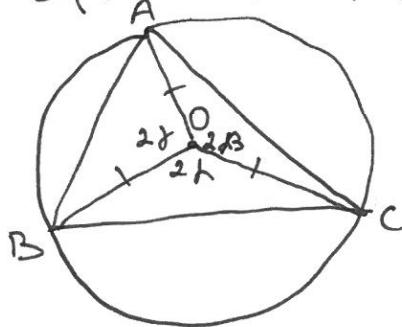


$$(BOC) = \frac{1}{2} R \cdot BC$$

$$(COA) = \frac{1}{2} R \cdot AC$$

$$(AOB) = \frac{1}{2} R \cdot AB$$

$$\mathcal{J}((BOC):(COA):(AOB)) \Leftrightarrow \mathcal{J}(BC:AC:AB) \Leftrightarrow \mathcal{J}(a:b:c)$$



$$\angle BAC = \alpha \Rightarrow \angle BOC = 2\alpha.$$

$$\text{Аналогично } \angle COA = 2\beta \text{ и } \angle AOB = 2\gamma$$

$$(BOC) = \frac{1}{2} R^2 \cdot \sin 2\alpha$$

$$(AOC) = \frac{1}{2} R^2 \cdot \sin 2\beta$$

$$(AOB) = \frac{1}{2} R^2 \cdot \sin 2\gamma$$

$$O(\sin 2\alpha : \sin 2\beta : \sin 2\gamma)$$

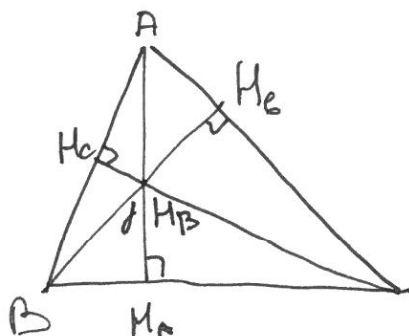
$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2 \cdot \frac{a}{2R} \cdot \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{a^2(b^2 + c^2 - a^2)}{2R \cdot abc}$$

Так, как знаменатель будет одинаковый при всех вершинах

$$O(a^2(b^2 + c^2 - a^2) : b^2(a^2 + c^2 - b^2) : c^2(a^2 + b^2 - c^2))$$

Дата: 01.07.19

Летописец: LERA



$$\angle BHC = \beta + \gamma$$

$$\sin(\beta + \gamma) = \sin \alpha \quad (\text{поскольку } \alpha + \beta + \gamma = 180^\circ)$$

$$(BHC) = \frac{1}{2} BH \cdot HC \cdot \sin \alpha =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{BH \cdot AC}{\sin \beta} \cdot \frac{AC \cdot \cos \gamma}{\sin \beta} \cdot \sin \alpha =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{AB \cdot \cos \beta}{\sin \gamma} \cdot \frac{AC \cdot \cos \gamma}{\sin \beta} \cdot \sin \alpha =$$

$$= \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin \alpha \cdot \frac{\cos \beta}{\sin \beta} \cdot \frac{\cos \gamma}{\sin \gamma} = \frac{(ABC)}{\tan \beta \cdot \tan \gamma} = \frac{(ABC) \tan \alpha}{\tan \alpha \cdot \tan \beta \cdot \tan \gamma}$$

Аналогично, площади (AHC) и (AHB) равны:

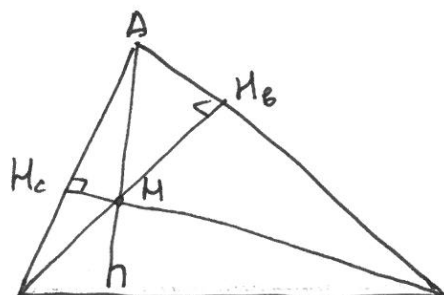
$$(AHC) = \tan \beta \cdot \frac{(ABC)}{\tan \alpha \cdot \tan \beta \cdot \tan \gamma}$$

$$(ABH) = \tan \gamma \cdot \frac{(ABC)}{\tan \alpha \cdot \tan \beta \cdot \tan \gamma}$$

$$H(\tan \alpha : \tan \beta : \tan \gamma)$$

Второй способ:

$$\frac{BH_a}{CH_a} = \frac{\frac{AH_a}{\tan \beta}}{\frac{AH_a}{\tan \gamma}} = \frac{\tan \gamma}{\tan \beta}$$



Масса в вершине B относительно H_a к массе в C
вершине C также как $\tan \beta$ относится к
 $\tan \gamma$

$$\frac{m_B}{m_C} = \frac{\tan \beta}{\tan \gamma}$$

Аналогично

$$\frac{m_A}{m_B} = \frac{\tan \alpha}{\tan \beta} ; \frac{m_C}{m_A} = \frac{\tan \gamma}{\tan \alpha} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m_A : m_B : m_C = \tan \alpha : \tan \beta : \tan \gamma$$

Дата: 01.07.19

Летописец: LERA

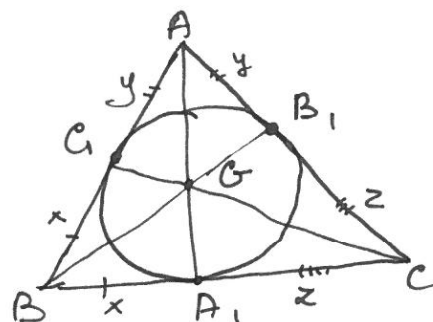
Координаты точки Шерюна:

$$\begin{cases} a = x+z \\ b = y+z \\ c = x+y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{a+c-b}{2} \\ y = \frac{b+c-a}{2} \\ z = \frac{a+b-c}{2} \end{cases}$$

$$\frac{m_b}{m_c} = \frac{z}{x} = \frac{a+b-c}{a+c-b}$$

$$\frac{m_c}{m_a} = \frac{y}{z} = \frac{b+c-a}{a+b-c}$$

$$\frac{m_a}{m_b} = \frac{x}{y} = \frac{a+c-b}{b+c-a}$$

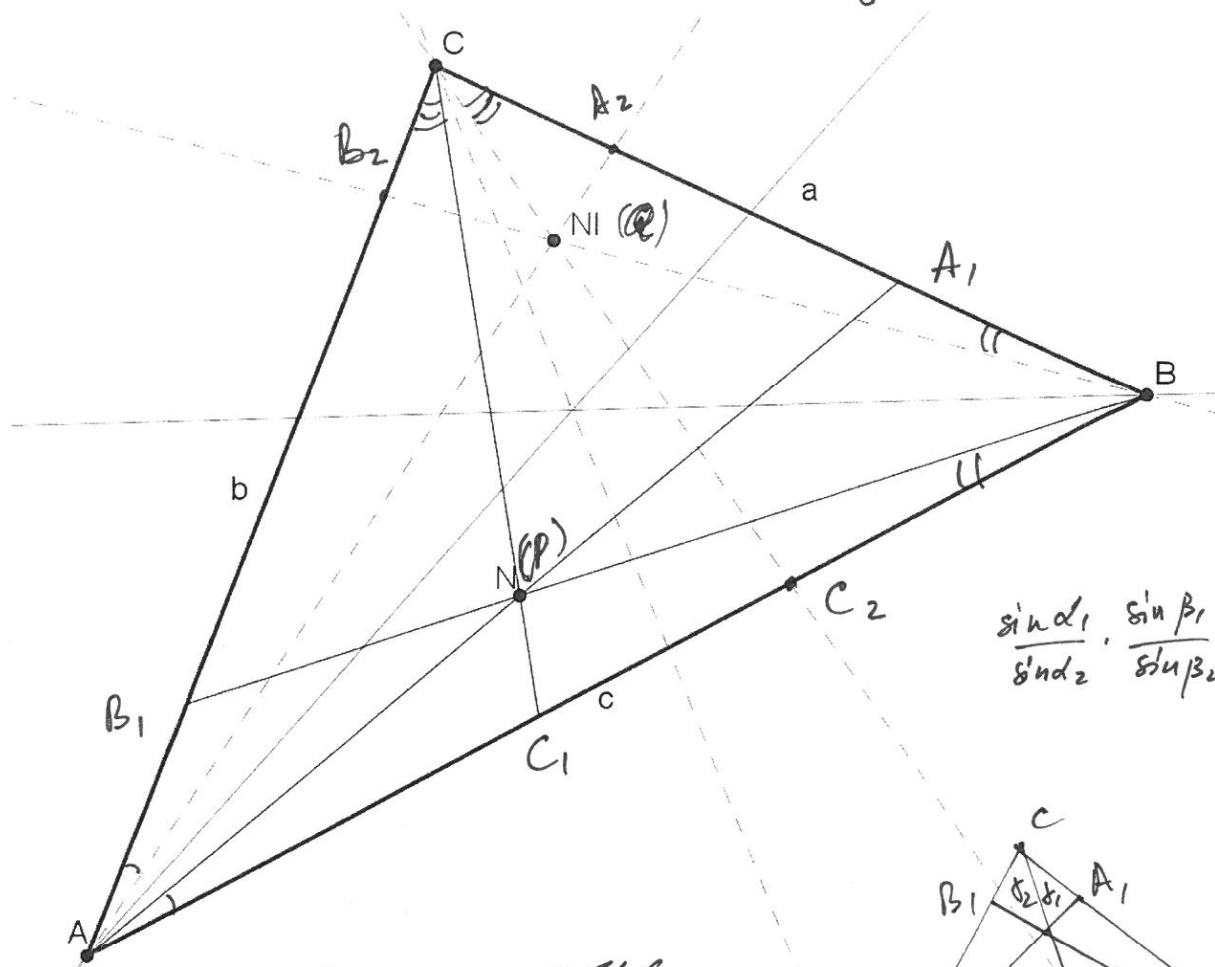


$$\begin{aligned} m_a : m_b : m_c &= x \cdot z : y \cdot z : x \cdot y = \\ &= \left(\frac{a+c-b}{2} \cdot \frac{a+b-c}{2} \right) : \left(\frac{b+c-a}{2} \cdot \frac{a+b-c}{2} \right) : \left(\frac{a+c-b}{2} \cdot \frac{b+c-a}{2} \right) \\ &= \left(\frac{1}{p-a} : \frac{1}{p-b} : \frac{1}{p-c} \right), \quad p = \frac{a+b+c}{2} \end{aligned}$$



0207.

Martynuk Julia



$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} \cdot \frac{\sin \beta_1}{\sin \beta_2} \cdot \frac{\sin \gamma_1}{\sin \gamma_2} = 1$$

Через тригонометрическую т. Чебы
легко доказать, что образы равны
таким образом.

Положим P ставится в соответствие т. Q и наоборот:
т. Q ставится в соответствие т. P . Такие точки называются
узлами сопряженности.

P_1, P_2, P_3 - образы т. P

Q - центр описанной окружности

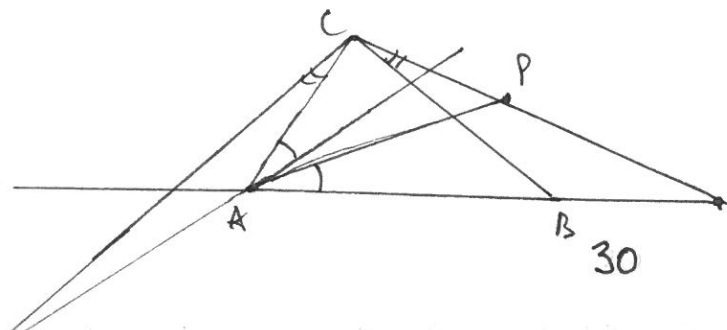
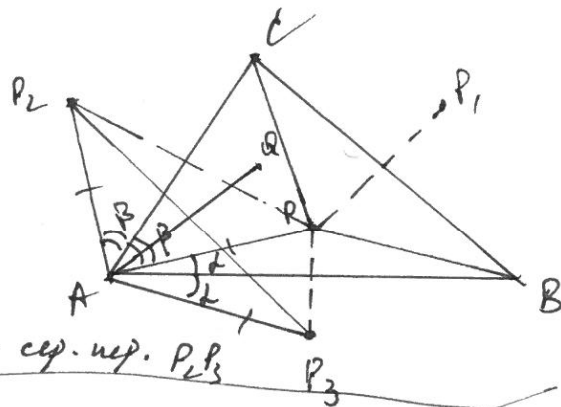
$\triangle P_2 P_3$ - равнобедр.

так как Q - центр опис. окр., AQ - сев. пер. $P_2 P_3$

$$\angle P_2 A P_3 = 2\alpha + 2\beta$$

$$\angle P_2 A Q = \alpha + \beta$$

$$\angle CAQ = (\alpha + \beta) - \beta = \alpha$$

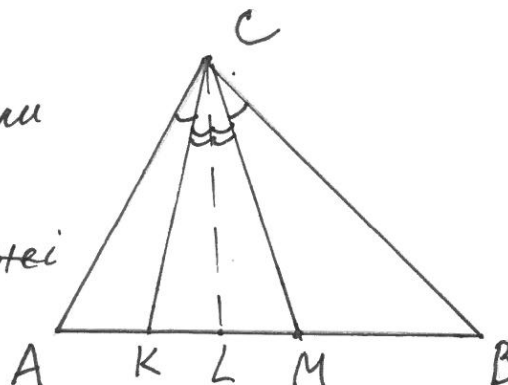


Дата: 02.07.2019

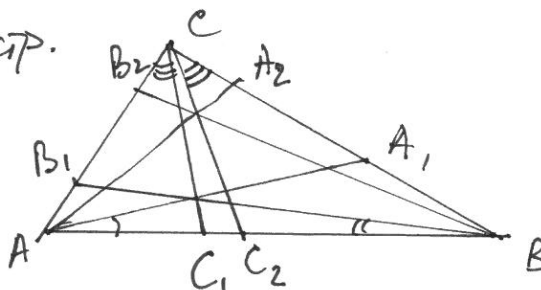
Летописец: Martyniuk Julia

Дано: CK - медиана
 CL - биссектриса
 CM - медиана, образ CK при
 симметрии относительно CL

 AA_1, BB_1, CC_1 - конкурентные
 медианы



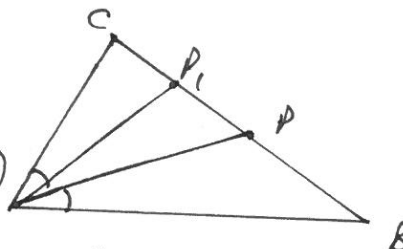
смотреть утверждение 17.



1) Угол или. сопр. - не взаимно однозначное отображ.
 Для т. A, B, C взаимн. сопр. не рассматривается
 (они не могут переходить в другие точки)

$$\begin{aligned} S_{\text{бис.}}(AP) &= AP, \\ S_{\text{бис.}}(CP) &= CA, \\ S_{\text{бис.}}(BP) &= BA, \end{aligned} \Rightarrow S(P) = A$$

любая точка прямой
 CB переходит в т. A



18

Р лежит на опис. круге ABC .
 Анализ. где остальные вершины

$$S_{\text{бис.}}(AP) = AM$$

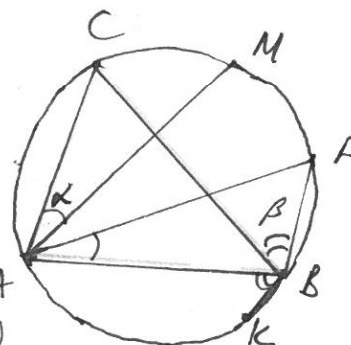
$$S_{\text{бис.}}(BP) = BK$$

$$AM \cap BK = Q (?)$$

$$\angle CAP = \angle CBP = \beta \text{ (опираются на одну дугу } \cup CP)$$

$$\angle MAB = \angle CAP = \beta = \angle ABK \Rightarrow AM \parallel BK$$

Докажем $AM \cap BK$ в бесконечно
 удаленной точке.



задают 1 бекк. удам. точку
 (задают вторую бес. удам. точку)

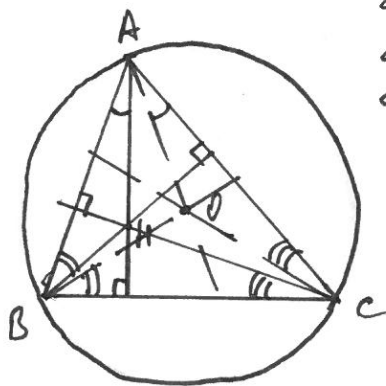
Дата: 02.07.2019

Летописец: Мартынік Julia

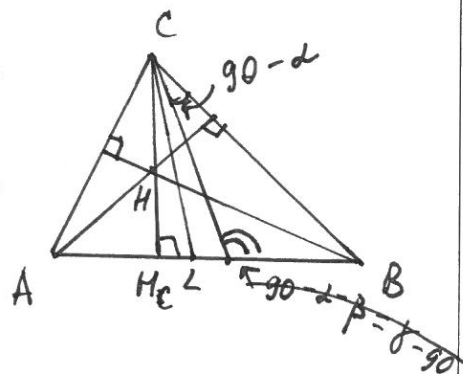
При предыдущем доказательстве угловально сопоставили - взаимно ортогональное без слагаемых (1) и (1')

- (2) неподвижные точки (переходят сами в себя)
- 1) Центр вписанного ~~коло~~ вписанной окружности
 - 2) Центры вневписанной окружности (только вписанное коло)

(3)

 $H \rightarrow O$ 

$$\begin{aligned}\angle BAH &= 90^\circ - \beta \\ \angle AOC &= 2\beta \\ \angle OAC &= 90^\circ - \beta\end{aligned}$$

 $O \rightarrow H$

$M \rightarrow S$ (т. пересечения симедиан)
 L (т. Лемана)
 $L \rightarrow M$



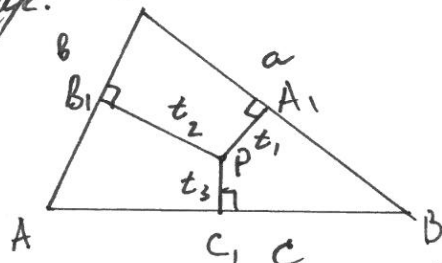
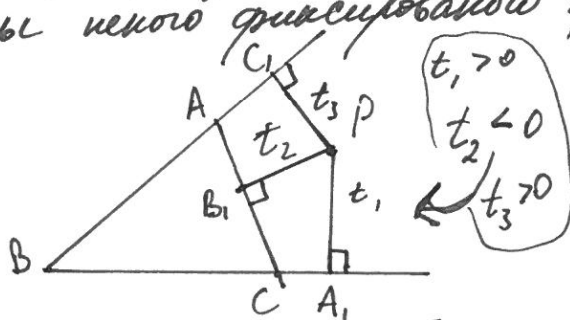
Дата: 02.07.2019

Летописец: Martyniuk Julia

Тригониальные координаты

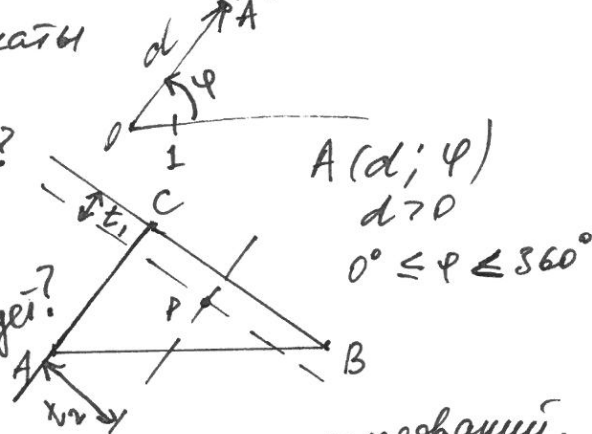
1) $P(t_1 : t_2 : t_3)$, где t_1, t_2, t_3 - перпендикуляры с т. P на стороны некоего фиксированного треуг.

2)



3) Если точка лежит на прямой, содержащей сторону, соответствующая координата равна 0. Полярные координаты

заданы две координаты?

Итак $P(t_1 : t_2 : t_3)$ $P_1(t_1 : t_2 : t'_3)$ $t'_3 \neq t_3$ т. P1 не существует?

Третья координата нужна для исследований.

ВК (барицентр.) ТК (тригони.)

 $P(m_1 : m_2 : m_3)$

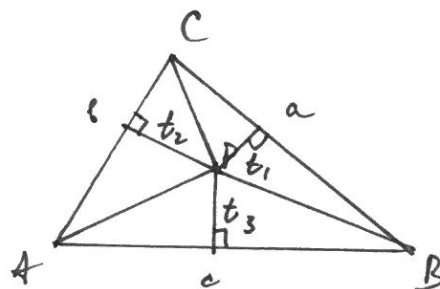
$$m_1 = (BCP) \cdot 2 = at_1$$

$$m_2 = (CAP) \cdot 2 = bt_2$$

$$m_3 = (ABP) \cdot 2 = ct_3$$

$$\begin{aligned} m_1 &= at_1 \\ m_2 &= bt_2 \\ m_3 &= ct_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t_1 &= \frac{m_1}{a} \\ t_2 &= \frac{m_2}{b} \\ t_3 &= \frac{m_3}{c} \end{aligned}$$



Дата: 02.07.2019

Летописец: Martynik Julia

$$t_2 = CP \cdot \sin \alpha_1$$

$$t_1 = CP \cdot \sin \alpha_2$$

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{\sin \alpha_2}{\sin \alpha_1}$$

$$\text{Sic. } (\frac{P}{Q}) = Q$$

$Q(t_2 : t_1 : g)$ потому что $\angle BCC_2 = \alpha_1$
 $\angle C_2CA = \alpha_2$

$$Q(\frac{1}{t_1} : \frac{1}{t_2} : g')$$

Две группы сторон

$$Q(g'' : \frac{1}{t_2} : \frac{1}{t_3})$$

$$Q(\frac{1}{t_1} : \frac{1}{t_2} : \frac{1}{t_3})$$

Вывод: Угловое соотношение
 переводит точку

$$P(t_1 : t_2 : t_3)$$

$$Q(\frac{1}{t_1} : \frac{1}{t_2} : \frac{1}{t_3})$$

Точки на прямых AC, AB, CB не рассматриваются.

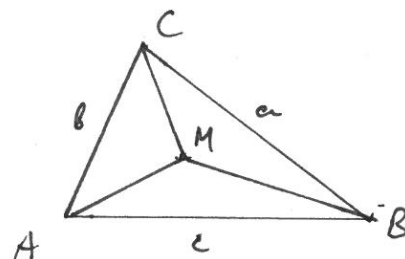
$$\text{BK: } M(1:1:1)$$

$$\text{TK: } M(\frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c})$$

$$M \rightarrow L$$

$$\text{TK: } L(a:b:c)$$

$$\text{BK: } L(a^2:b^2:c^2)$$



Дата: 02.07.19

Летописец: Martyniuk Julia

Изотомическое сопоставление (смотреть предыдущую раскладку)

№1

Куда переходит точка Мерона

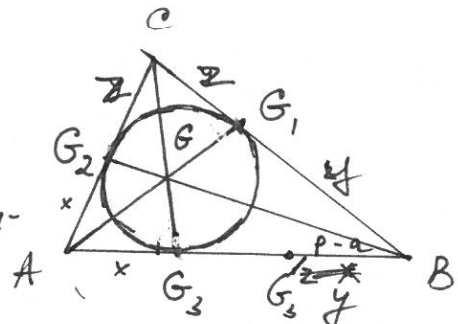
$$x+y=e$$

$$2(x+y+z) = a+b+c$$

$$2(x+y+z) = 2p$$

$$x = p - a$$

G'_3 - точка касания внешней
самой окружности.



Точка пересечения таких прямых - точка Кегеле
(смотреть предыдущие конспекты)

$$G \rightarrow N.$$

№2

ВК: $P \leftrightarrow Q$ (изотомически)

$$P(m_1 : m_2 : m_3)$$

$$Q\left(\frac{1}{m_1} : \frac{1}{m_2} : \frac{1}{m_3}\right)$$

