



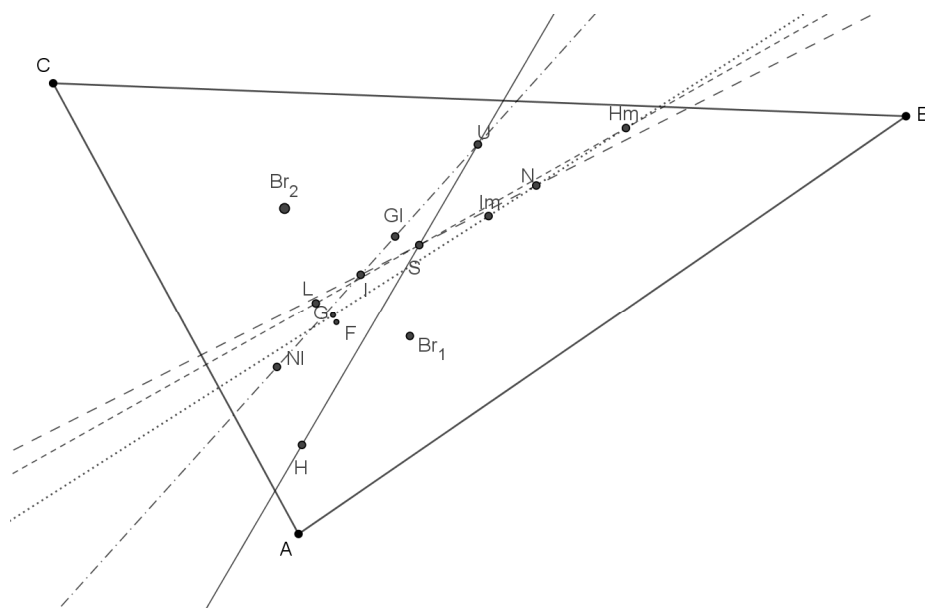
Mathematische Chronik des 10. LGH - MATHE - SPRACH – AUSTAUSCHES

LANDESGYMNASIUM FÜR HOCHBEGABTE
Schwäbisch Gmünd, Deutschland

LYZEUM „NAUKOVA ZMINA“
Kiew, die Ukraine

"Wunderbare Punkte im Dreieck" und algebraische Flächen mit dem Programm "SURFER"

25.06 – 09.07.2019 - Aufenthalt der ukrainischen Gruppe in Deutschland



Математическая летопись ДЕСЯТОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБМЕНА

ЛИЦЕЙ «НАУКОВА ЗМІНА»
Киев, Украина

ГИМНАЗИЯ ДЛЯ ОСОБО ОДАРЁННЫХ ДЕТЕЙ
Швебиш Гмюнд, Германия

"Замечательные точки в треугольнике" и алгебраические поверхности в программе "SURFER"

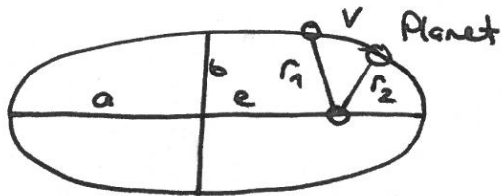
25.06 – 09.07.2019 – украинская группа в Германии

Datum: 26.06.

Chronist: Katharina Köppe

Mathematische Beschreibung der Bewegung der Planeten:

$$\frac{v^2}{2} - \frac{M}{r} = -\frac{M}{2a} \quad (\text{Vis-Viva Gleichung})$$

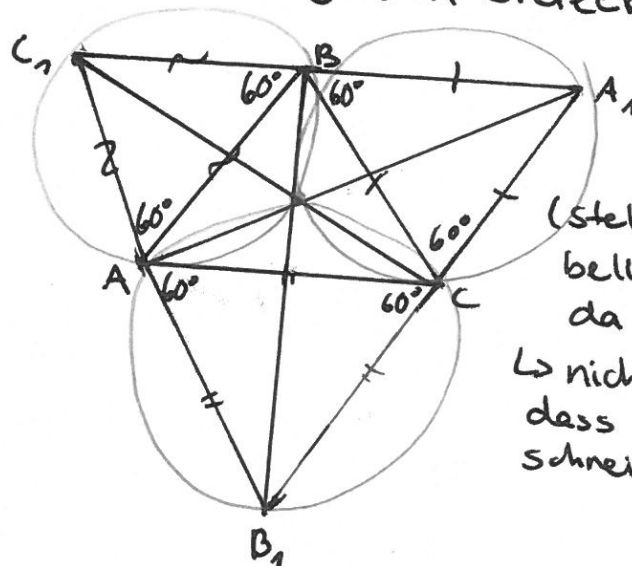


→ Bewegung hängt nur von zwei Parametern ab.

(Ellipse, Parabel, Hyperbel)
Kreis → Bewegungsmöglichkeiten

Alexander Geuzel studiert Luft- und Raumfahrt-technik an der Universität in München.

1. Fermat - Punkt F - Der Punkt der minimalen Summe der Abstände zu den Dreieckseckpunkten



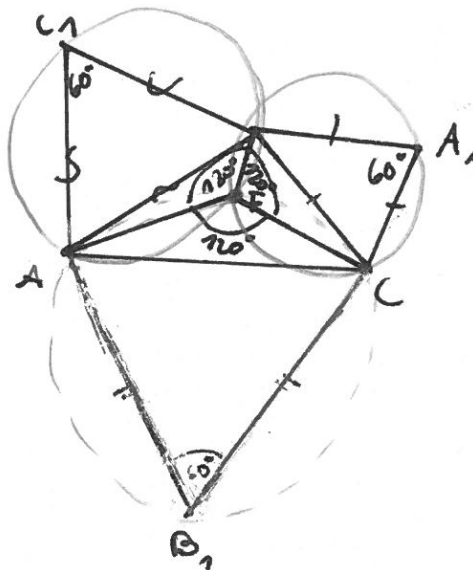
(stellt ein beliebiges Dreieck da!)

↳ nicht offensichtlich, dass sich die Geraden schneiden

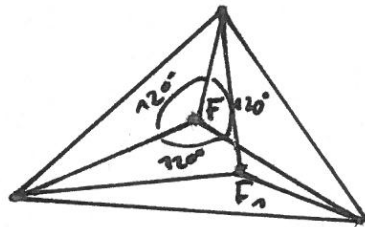
Es muss bewiesen werden, dass die Eckpunkte der nach außen liegenden Dreiecke verbunden mit den Eckpunkten des ersten Dreiecks sich an einem Punkt schneiden.

Datum: 26.06.

Chronist: Katharina Köppe

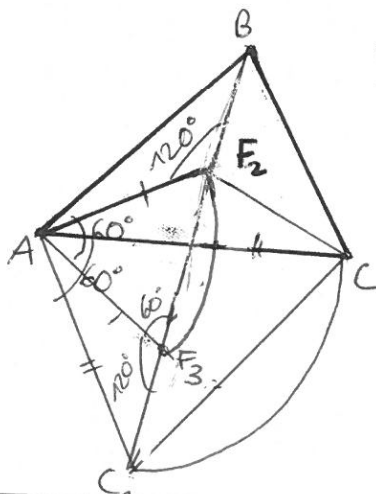


Ein beliebiges Dreieck indem jeder Winkel 120° ist.



$$\forall F_1 \in (\triangle ABC), F_1 \neq F$$

$$FA + FB + FC < F_1A + F_1B + F_1C$$



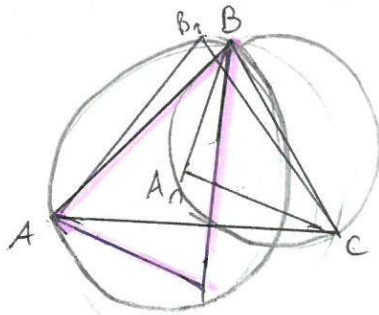
$$\begin{aligned} F_2A + F_2B + F_2C &= F_2F_3 + F_2B + F_3C_1 \\ (F_2A + F_2B + F_2C) &\rightarrow B, F_2, F_3, C_1 \in l \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\parallel \\ &\downarrow \\ &\angle AF_2B = 120^\circ \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Wenn die Summe minimal ist, sind alle Winkel 120°

1. In einem Dreieck mit allen Winkeln $> 120^\circ$ ein Punkt existiert wo alle Winkel 120° sind (minimum)
2. In diesem Punkt schneiden sich 3. Umkreise
Wir haben aber nicht gezeigt dass sich die 3. Geraden schneiden.

Was ist wenn ein Winkel größer als 120° ist?



Datum: 27.06.

Chronist: Hanne Hanneert

„Es ist in der That bewunderungswürdig, dass eine so einfache Figur wie das Dreieck, so unerschöpflich an Eigenschaften ist“

A. L. CRELLE, 1821

I. Klassische Transversalenschnittpunkte - Merkwürdige Punkte im Dreieck

1. Schwerpunkt S - Schnittpunkt der Dreiecks Seitenhalbierenden.
2. Inkreismittelpunkt I - Schnittpunkt der Winkelhalbierenden.
3. Orthozentrum H - Schnittpunkt der Höhen.
4. Umkreismittelpunkt O - Schnittpunkt der Mittelsenkrechten.

II. Weitere Entwicklung ab Mitte des 17. Jahrhunderts.

1. Fermat - Punkt
2. Satz von CEVA

III. Weitere Entwicklung ab dem 18. Jahrhundert.

1. Satz von CARNOT
1. GERGONNE - Punkt G
2. NAGEL - Punkt N
3. Mittenpunkt M
4. SPIEKER - Punkt Sp
5. NAPOLEON - Punkt Nap
6. BROCARD - Punkte Br

IV. Isogonal konjugierte Punkte

1. Lemoinepunkt L - Schnittpunkt der Symmedianen. Isogonal konjugiert mit dem Schwerpunkt S.
2. Punkt Gl - isogonal konjugiert zum GERGONNE - Punkt G.
3. Punkt Nl - isogonal konjugiert zum Nagel Punkt N

V. Isotom - konjugierte Punkte.

1. Punkt Im - isotom - konjugiert dem Innkreismittelpunkt I.
2. Punkt Hm AntiOrthozentrum - isotom - konjugiert dem Orthozentrum H.

VI. Besondere Geraden.

1. Eulersche Gerade
2. Nadelsche Gerade



27.06.

VII. Aus „Die Entwicklung der neueren Dreiecksgeometrie“ von Peter Baptist

1. **Pierre de FERMAT** (1601 - 1665).

Erst Mitte des 17. Jahrhunderts wurde die Liste der vier klassischen Transversalenschnittpunkte um einen weiteren besonderen Punkt erweitert. Am Schluß des vierten Teils seiner „Abhandlung über Maxima und Minima“ stellt Pierre de FERMAT die Aufgabe, den Punkt kleinster Entfernungssumme von den drei Punkten zu finden (S.33).

2. **Giovanni CEVA** (1647 - 1734) .

Im Jahre 1678 erschien in Mailand die Schrift „De lineis rectis se invicem secantibus, statico construction“

3. **Graf Lazare Nicolas Marguerite Carnot** war französische Offizier, Mathematiker und Politiker. * 13. Mai 1753 in Nolay, Burgund, heute Département Côte - d'Or; † 2. August 1823 in Magdeburg)4. **Christian Heinrich von NAGEL** (1803 - 1882). Lehrer in Tübingen und Ulm5. **Karl Wilhelm FEUERBACH** (1800 - 1834) Gymnasiallehrer in Erlangen und Hof.6. **Pierre Rene' Jean - Baptiste Henri BROCARD** (1845 - 1922) französischer Offizier und Ingenieur.

Die nach dem BROCARD genannten Punkte wurden lange vor ihm bereits von CRELLE entdeckt“

7. **August Leopold CRELLE** (1780 - 1855)

Herausgeber des „Journals für die reine und angewandte Mathematik“

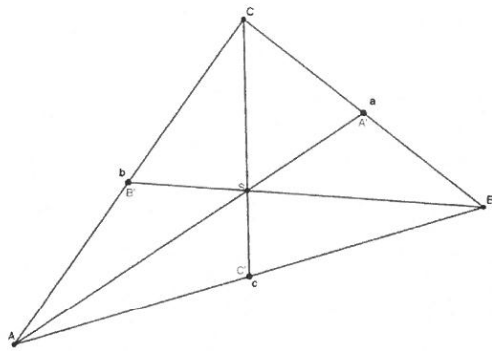
8. **Joseph Diaz GERGONNE** (19.06. 1771 Nancy - 04.05. 1859 Montpellier)

Herausgeber „Annales de mathematiques pures et appliquees“

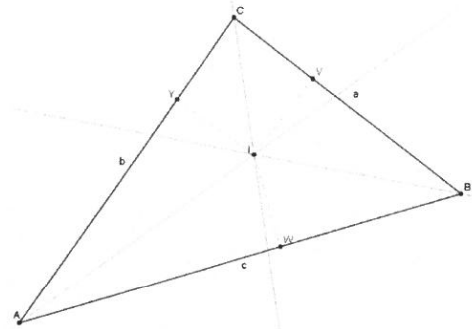


27.06.

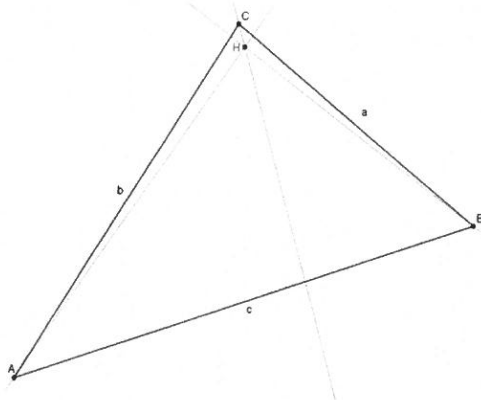
I. Klassische Transversalenschnittpunkte - Merkwürdige Punkte im Dreieck



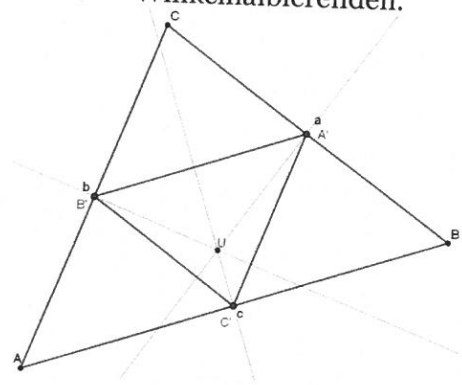
1. Schwerpunkt S - Schnittpunkt der Dreiecks Seitenhalbierenden.



2. Inkreis Mittelpunkt I - Schnittpunkt der Winkelhalbierenden.



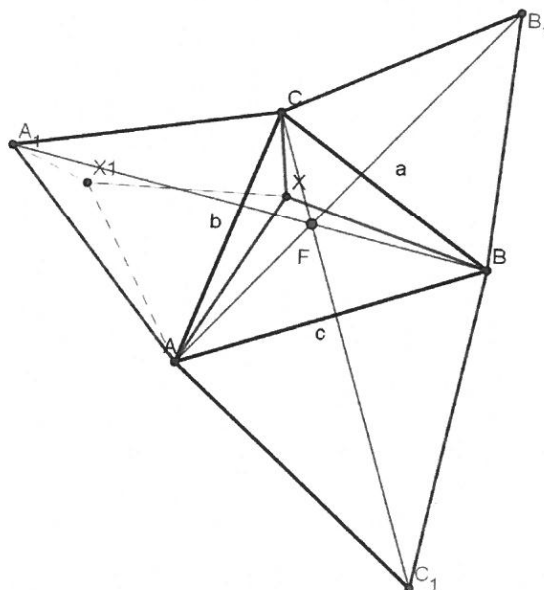
3. Orthozentrum H - Schnittpunkt der Höhen.



4. Umkreismittelpunkt O - Schnittpunkt der Mittelsenkrechten - Schnittpunkt der Höhen des Mitteldreiecks.

II. Weitere Entwicklung ab Mitte des 17. Jahrhunderts.

1. **Fermat - Punkt F** - Der Punkt der minimalen Summe der Abstände zu den Dreieckseckpunkten.



2. Satz von CEVA.**Fall des Inneren Punktes.**

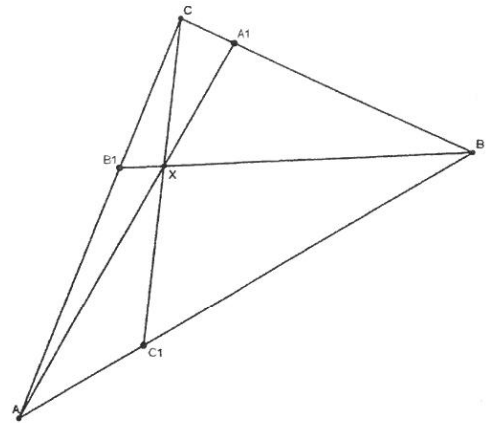
Die Punkte A_1 , B_1 und C_1 liegen entsprechend auf den Seiten BC , AC und AB eines Dreiecks ABC .

Die folgende zwei Behauptungen sind äquivalent:

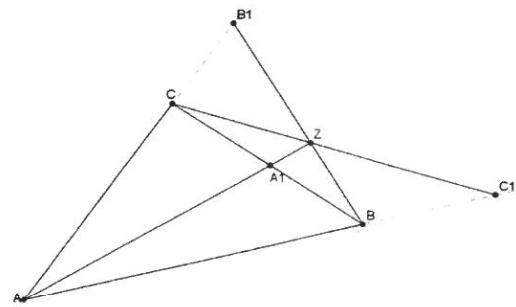
- (a) Die Geraden AA_1 , BB_1 und CC_1 schneiden sich in einem inneren Punkt des Dreiecks ABC .
- (b) $\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1$ (CEVA - Bedingung)

(a) $\Rightarrow$ (b) Crellesche Beweis mit Flächeninhalten der Dreiecke ist bekannt

(b) $\Rightarrow$ (a) indirekter Beweis ist auch bekannt

**Fall des Äußeren Punktes.**

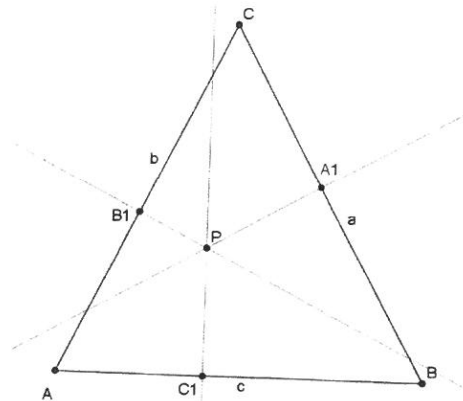
Der Satz von CEVA bleibt gelten, wenn der Punkt Z außerhalb des Dreiecks liegt, d.h. zwei der Punkten A_1 , B_1 und C_1 liegen auf den Verlängerungen der Dreiecksseiten.

**Trigonometrische Form.**

$$\frac{\sin(\sphericalangle ACC_1)}{\sin(\sphericalangle BCC_1)} \cdot \frac{\sin(\sphericalangle CBB_1)}{\sin(\sphericalangle ABB_1)} \cdot \frac{\sin(\sphericalangle BAA_1)}{\sin(\sphericalangle CAA_1)} = 1$$

III. Weitere Entwicklung ab dem 18. Jahrhundert.**1. Satz von CARNOT**

Drei Orthogonalen zu den jeweiligen Seiten eines Dreiecks ABC schneiden sich in einem Punkt P genau dann, wenn die folgende Bedingung erfüllt ist:
 $|AB_1|^2 + |CA_1|^2 + |BC_1|^2 = |AC_1|^2 + |BA_1|^2 + |CB_1|^2$,
 wobei A_1 , B_1 , C_1 die Schnittpunkte der Orthogonalen mit den Dreiecksseiten oder ihrer Verlängerungen sind.

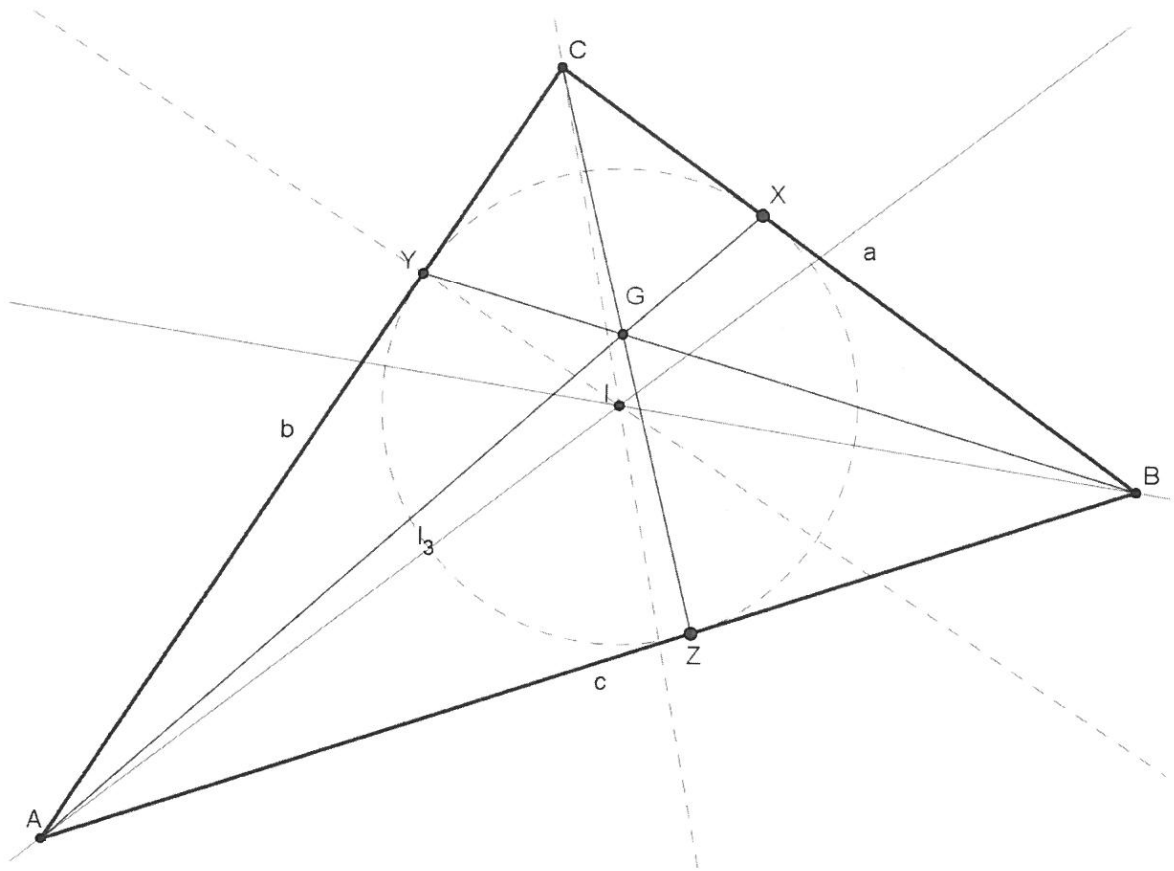


Aufgabe: Beweise den Satz von CARNOT mithilfe des Satzes des Pythagoras.

27.06.

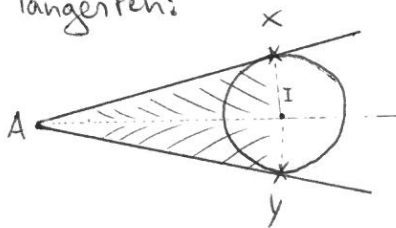
Chronist: Hanne Hannert

2. GERGONNE- Punkt G – der Schnittpunkt der Ecktransversalen zu den Berührungspunkten des Innkreises.



gegeben: beliebiges $\triangle ABC$; I ist Inkreismittelpunkt; X, Y, Z sind Berührungspunkte des Inkreis mit dem $\triangle ABC$; Ecktransversalen CZ, BY, AX ; Schnittpunkt G ?

Tangenten:

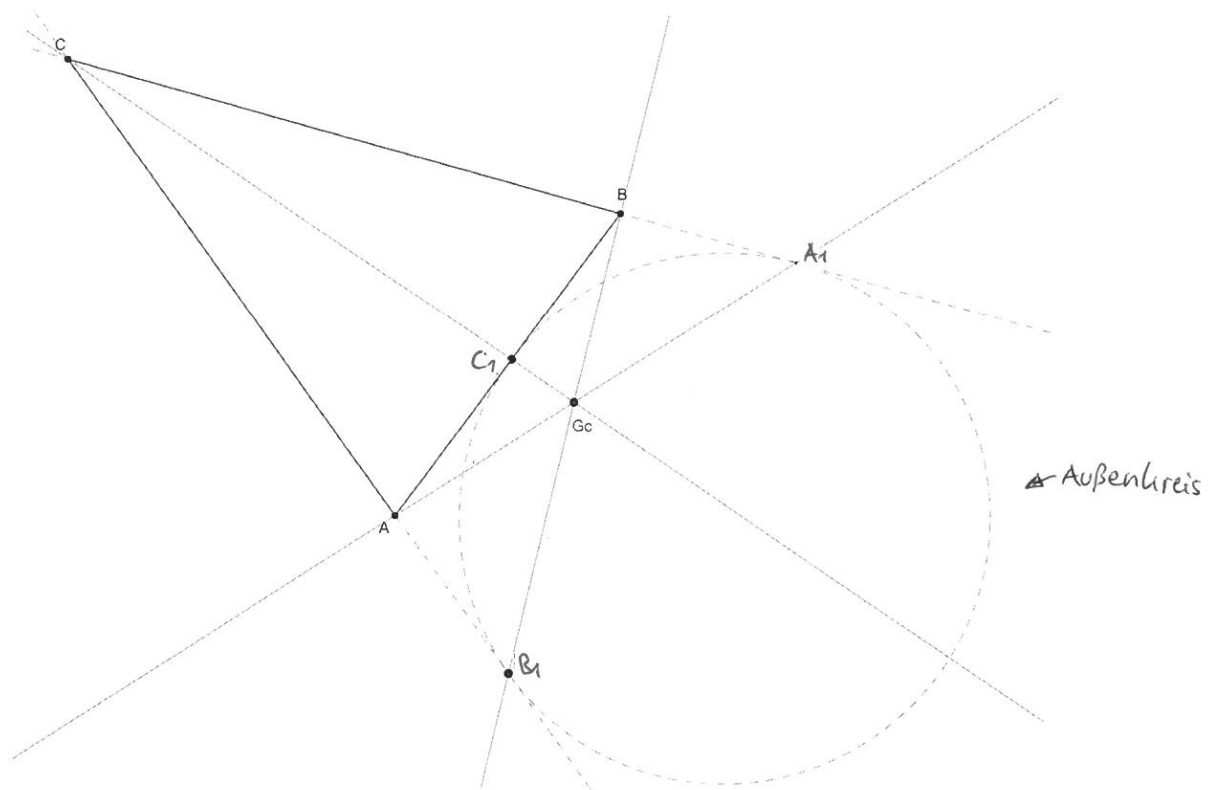


$$AX = AY$$



27.06.

Hanne Hanuert

Äußerer GERGONNE-Punkt G_c 

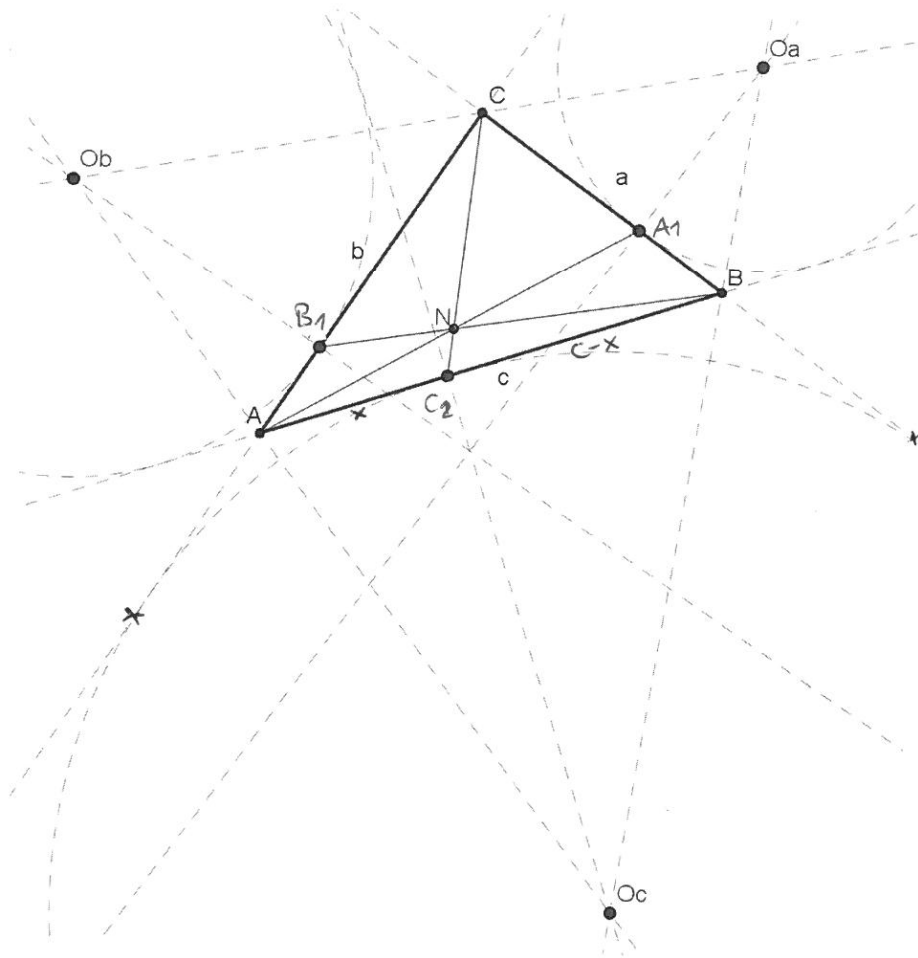
Satz von Ceva: $\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1$

hier gegeben: beliebiges $\triangle ABC$; Außenkreis;

Ergebnis: 3 Äußere Gergonne-Punkte G_A, G_B, G_C



3. NAGEL Punkt N- der Schnittpunkt der Ecktransversalen zu den Berührungspunkten der Ankreise.



gegeben:

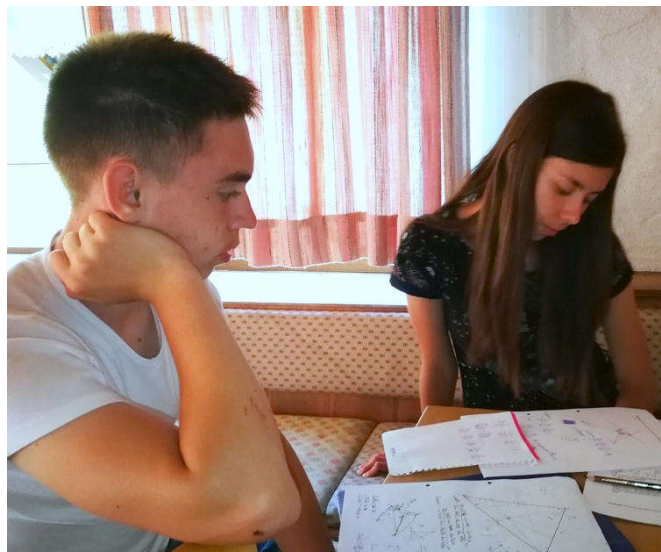
AA_1, BB_1, CC_2 sind Ecktransversalen des $\triangle ABC$ und N ist ihr Schnittpunkt

$$b+x = a+c-x$$

$$x = \frac{a+c-b}{2}$$

$$x = \frac{a+b+c-2b}{2}$$

$$x = p-b \quad \text{mit } p = \frac{a+b+c}{2}$$

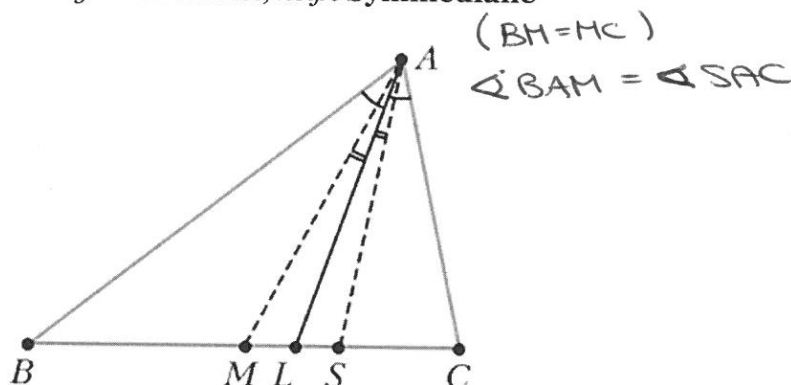


Определения/ Definitionen

1. **Симедиана.** Рассмотрим треугольник ABC, его медиану AM и биссектрису AL. Пусть прямая AS симметрична прямой AM относительно прямой AL (точка S лежит на отрезке BC). Тогда отрезок AS называют **симедианой** треугольника ABC. Иногда симедианой называют прямую, содержащую отрезок AS.

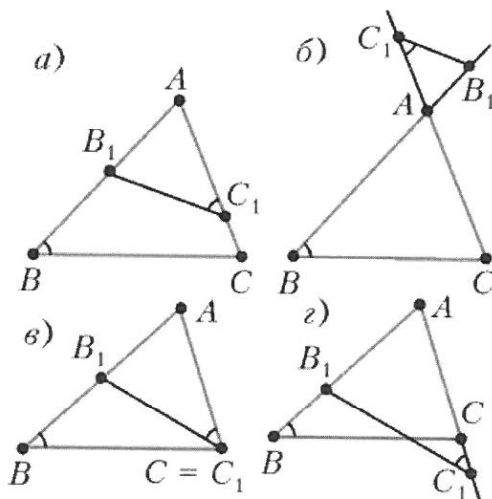
Симедиана — чевиана треугольника, луч которой симметричен лучу медианы относительно биссектрисы угла, проведенной из той же вершины.

Symmediane. Die Strecke AS, die zur Seitenhalbierenden AM bezüglich der Winkelhalbierenden AL symmetrisch ist, heißt **Symmediane**



2. **Антипараллельность.** Пусть точки B_1 и C_1 лежат на прямых AB и AC. Говорят, что отрезки B_1C_1 и BC антипараллельны (относительно пары прямых AB и AC, или относительно угла BAC), если $\angle AC_1B_1 = \angle ABC$. Возможны различные случаи расположения антипараллельных отрезков (a - e).

Antiparallelität. Die Strecken B_1C_1 und BC heißen **antiparallel** bezüglich der geraden AB und AC, wenn $\angle AC_1B_1 = \angle ABC$



27.06.

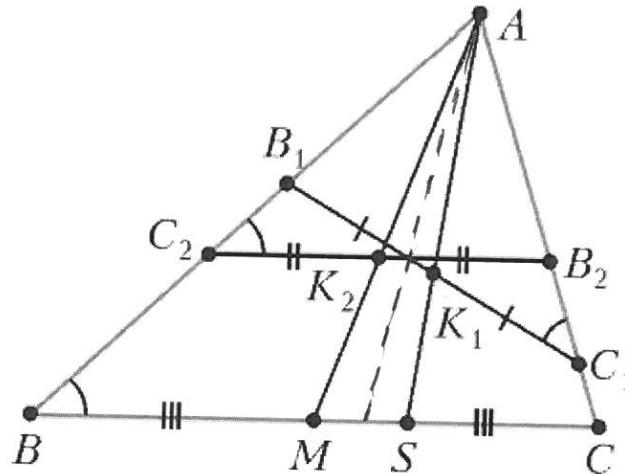
Jule Dyck

Факты и свойства / Sätze

1. В треугольнике ABC проведен отрезок B_1C_1 , антипараллельный стороне BC, с концами на прямых AB и AC соответственно. Прямая AS содержит симедиану треугольника ABC тогда и только тогда, когда она делит B_1C_1 пополам.

Die Strecke B_1C_1 ist antiparallel zur BC bezüglich AB und AC.

Die Strecke AS ist genau dann die Symmediane, wenn sie die Strecke B_1C_1 halbiert.



$$B_1K_1 = K_1C_1$$

Spiegelung von B_1C_1 bezüglich der Winkelhalbierenden
 $\Rightarrow C_2B_2$

$$\angle B_1C_1A = \angle AB_2C_2$$

$$B_2C_2 \parallel BC$$

$$B_2K_2 = K_2C_2$$

$$BM = MC, \text{ da } B_2C_2 \parallel BC \text{ und } B_2K_2 = K_2C_2$$

$\Rightarrow AM$ ist das Spiegelbild von AS bezüglich der Winkelhalbierenden

$\Rightarrow AS$ ist die Symmediane



27.06.

Jule Dyck

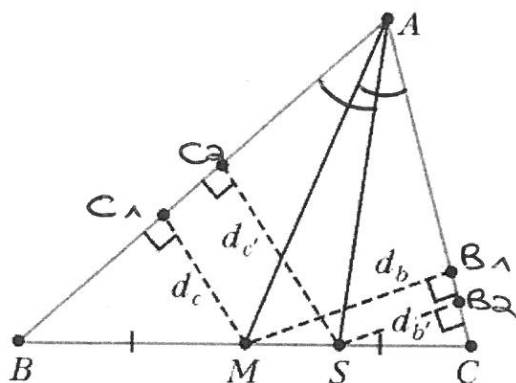
2. Пусть точка S лежит на стороне BC треугольника ABC. Тогда эквивалентны следующие условия:

Der Punkt S liegt auf der Seite BC des Dreiecks ABC. Dann sind die folgende Bedingungen äquivalent:

$$\begin{array}{llll} \text{a)} \frac{d(S; AB)}{d(S; AC)} = \frac{c}{b} & \text{б)} \frac{S_{ABS}}{S_{ACS}} = \frac{c^2}{b^2} & \text{в)} \frac{d(B; AS)}{d(C; AS)} = \frac{c^2}{b^2} & \text{г)} \frac{BS}{CS} = \frac{c^2}{b^2} \end{array}$$

д) AS – симедиана/ Symmediane

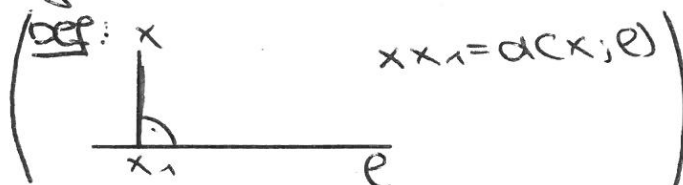
В данном случае используются стандартные обозначения для сторон треугольника $AB=c$, $AC=b$. Расстояние от точки X до прямой l будем обозначать $d(X, l)$.



$\triangle ABC$, AM ist die Seitenhalbierende,
AS ist die Symmediane,
AM ist gespiegelt zur Winkelhalbierenden
AS

I

$$\frac{d(S; AB)}{d(S; AC)} = \frac{c}{b}$$



$$\frac{S_{ABS}}{S_{ACS}} = \frac{BS}{CS} = \frac{d(B; AS)}{d(C; AS)} = \frac{c^2}{b^2}$$

(S_{ABC} ist der Flächeninhalt des Dreieck ABC)

$$S_{ABM} = S_{AMC}$$

$$\text{II} \quad \frac{BS}{CS} = \frac{S_{ABS}}{S_{ACS}} = \frac{cd c'}{bd b'} = \frac{c^2}{b^2}$$

$$\frac{1}{2} cd c' = \frac{1}{2} bd b' \Rightarrow \frac{c}{b} = \frac{db'}{dc}$$

$$(1) \triangle MAB_1 \sim \triangle SAC_2$$

$$(2) \triangle MAC_1 \sim \triangle SAB_2$$

$$\Rightarrow \frac{db'}{dc} = \frac{AS}{AM}$$

$$\text{a)} \frac{AS}{AM} = \frac{dc'}{db} \Rightarrow \frac{dc'}{db} = \frac{db'}{dc} \Leftrightarrow \frac{dc}{db} = \frac{db'}{dc'} = \frac{b}{c}$$

$$\text{III} \quad \frac{d(B; AS)}{d(C; AS)} = \frac{S_{ABS}}{S_{ACS}} = \frac{c^2}{b^2}$$

$$\frac{ASC}{ABC} \cdot \frac{BSA}{SAC} \cdot \frac{CSB}{SBA} = \frac{c^2}{b^2} \cdot \frac{b^2}{c^2} \cdot \frac{c^2}{b^2} = 1$$

13/10

27.06.

Jule Dyck

3. Пусть точка S лежит внутри угла BAC. Тогда эквивалентны следующие условия:

Der Punkt S liegt innerhalb des Winkels BAC. Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

- a) Прямая AS содержит симедиану / AS liegt auf der Symmediane.

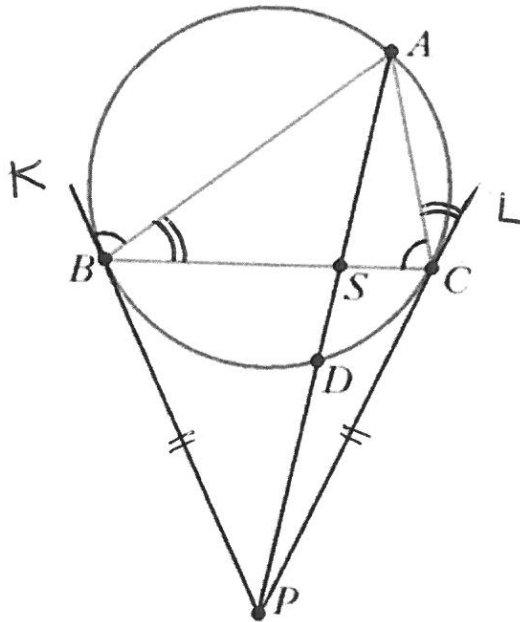
б) $\frac{d(S; AB)}{d(S; AC)} = \frac{c}{b}$ в) $\frac{S_{ABS}}{S_{ACS}} = \frac{c^2}{b^2}$ з) $\frac{d(B; AS)}{d(C; AS)} = \frac{c^2}{b^2}$ wenn eine dieser Bedingungen zutrifft, ist AS die Symmediane

(Выводится из Факта 2)

14/11

4. Касательные к описанной окружности треугольника ABC в точках B и C пересекаются в точке P, тогда прямая AP содержит симедиану AS.

Die Tangenten zum Umkreis des Dreiecks ABC in den Punkten B und C schneiden sich im Punkt P. Dann enthält die Strecke AP die Symmediane AS.



$$\frac{S_{ABP}}{S_{ACP}} = \frac{AB^2}{AC^2}$$

$$\frac{S_{ABP}}{S_{ACP}} = \frac{AB \cdot BP \cdot \sin(\angle ABP)}{AC \cdot CP \cdot \sin(\angle ACP)} = \frac{AB \cdot \sin(\angle ABK)}{AC \cdot \sin(\angle LCA)} = \frac{AB \cdot \sin(\angle BCA)}{AC \cdot \sin(\angle ABC)}$$

$$\left| \begin{array}{l} \angle ABK = \frac{1}{2} \angle A = \angle BCA \\ \text{Analog: } \angle LCA = \angle ABC \end{array} \right| \quad \frac{AB^2}{AC^2}$$

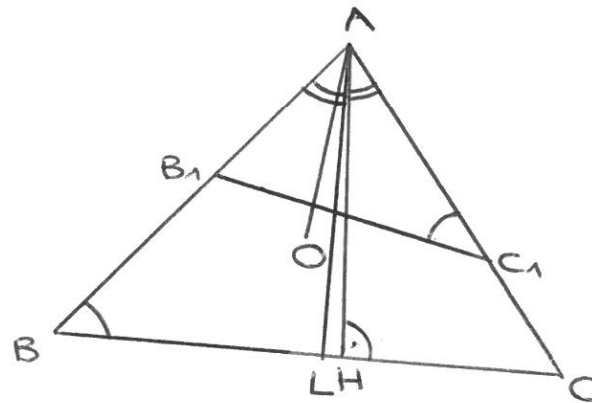
15/12

27.06.

Jule Dyck

5. Если отрезок B_1C_1 антипараллелен стороне BC , то $B_1C_1 \perp OA$, где O — центр описанной окружности. (Вспомогательная задача к 10).

Wenn B_1C_1 antiparallel zur BC bezüglich AB und AC , dann ist $B_1C_1 \perp OA$, wobei O der Mittelpunkt des Umkreises des Dreiecks ABC ist.



$$OA \perp B_1C_1$$

AL ist die Winkelhalbierende von $\angle BAC$

AO ist der Radius des Umkreises

AH ist die Höhe



27.06.

Maksim Meinerst

Точка Лемуана/ Lemoinepunkt

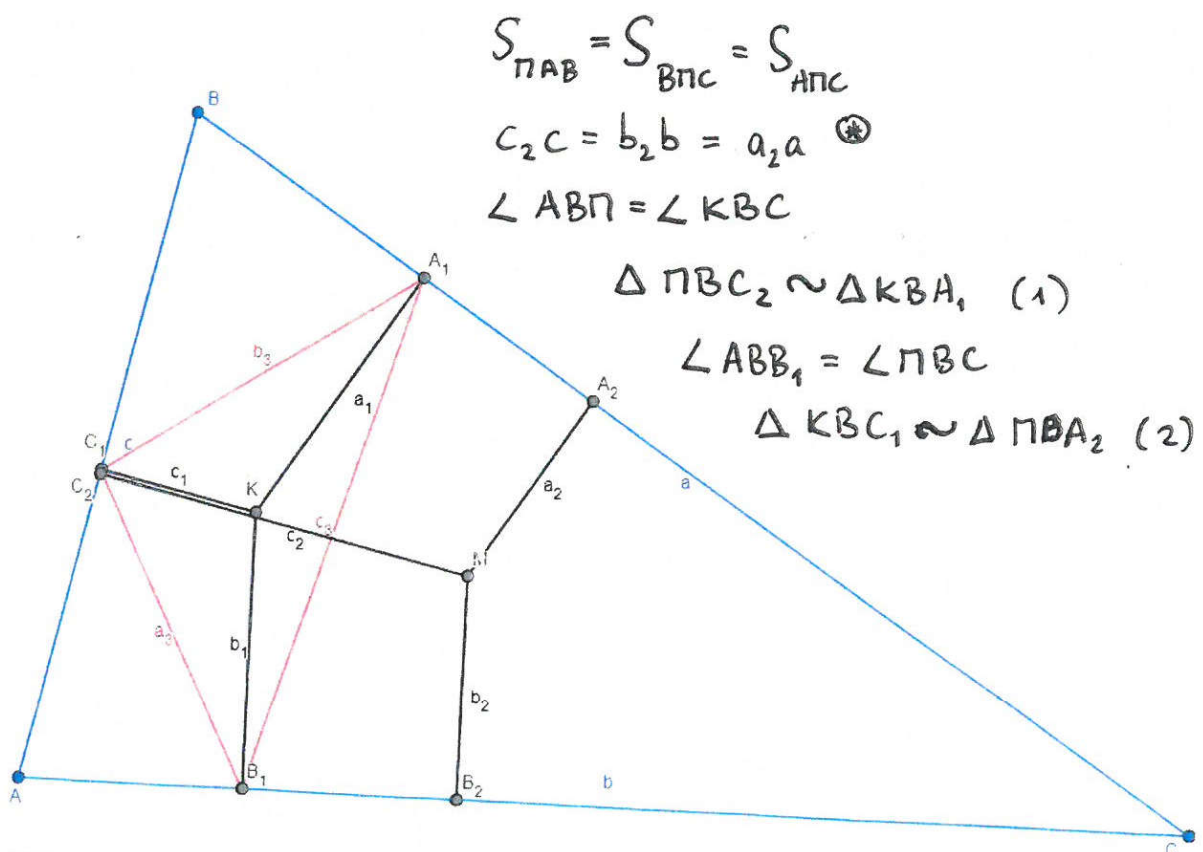
У точки Лемуана существует два равносильных определения:

- точка пересечения прямых, соединяющих каждую вершину треугольника с точками пересечения касательных к описанной окружности, проведённых из двух других вершин.
- точка пересечения симедиан.

Definition.

- Lemoinescher Punkt ist der Schnittpunkt der Symmedianen.
 - Der Schnittpunkt der Verbindungsgeraden einer Dreiecksecke mit dem Schnittpunkt der Tangenten zum Umkreis an den anderen Dreiecksecken.
1. Пусть A_1 , B_1 и C_1 — проекции точки Лемуана K на стороны треугольника ABC , тогда M — точка пересечения медиан треугольника $A_1B_1C_1$.

Seien A_1 , B_1 und C_1 — die Projektionen des Lemuaneschen Punktes K auf die Seiten des Dreiecks ABC . Dann ist M^K der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden des Dreiecks $A_1B_1C_1$.



$$S_{\triangle PAB} = S_{\triangle BPC} = S_{\triangle APC}$$

$$c_2 c = b_2 b = a_2 a \quad (*)$$

$$\angle ABP = \angle KBC$$

$$\triangle PBC_2 \sim \triangle KBA_1 \quad (1)$$

$$\angle ABB_1 = \angle PBC$$

$$\triangle KBC_1 \sim \triangle PBA_2 \quad (2)$$

$$\frac{BP}{BK} = \frac{c_2}{a_1} \quad (1) \quad \frac{BP}{BK} = \frac{a_2}{c_1} \quad (2) \quad a_1 a_2 = c_1 c_2 = b_1 b_2 \quad (**)$$

$$\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1} \quad \text{folgt durch } (*) \text{ und } (**)$$

Datum: 27.06.2019

Chronist: Plakim Tineit

$$S_{A_1KB_1} = \frac{1}{2} \sin \angle A_1KB_1 a_1 b_1 = \frac{1}{2} \sin \gamma a_1 b_1 = \frac{a_1 b_1 c}{4R}$$

$$S_{B_1KC_1} = \frac{b_1 c_1 a}{4R}$$

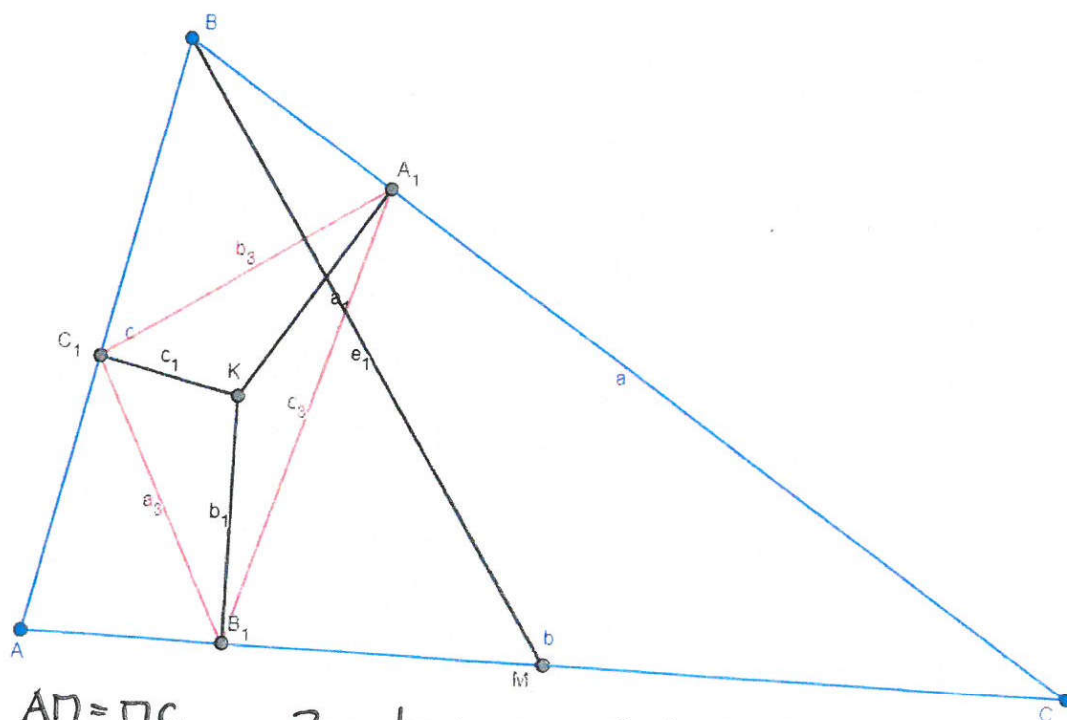
$$S_{A_1KC_1} = \frac{a_1 c_1 b}{4R}$$

$$S_{A_1KB_1} = S_{B_1KC_1} = S_{A_1KC_1}$$

(folgt aus $\textcircled{*}\textcircled{*}\textcircled{*}$ und den weiteren S (siehe links))

2. Пусть A_1, B_1 и C_1 — проекции точки Лемуана K треугольника ABC на стороны BC, CA и AB , тогда медиана BM треугольника ABC перпендикулярна прямой A_1C_1 .

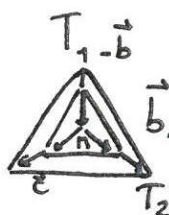
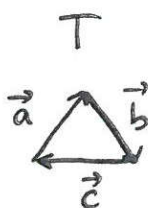
Seien A_1, B_1 und C_1 — die Projektionen des Lemuaneschen Punktes K auf die Seiten des Dreiecks ABC . Dann ist die Seitenhalbierende BM orthogonal zur Strecke A_1C_1 .



$$AM = MC$$

Zu beweisen: $C_1A_1 \perp BM$

Hilfssatz:



$$\vec{b}_1 = \lambda \vec{b}$$

(Dreieck T_2 entsteht durch das Hinzufügen der Vektoren aus T zu den Eckpunkten von T_1)

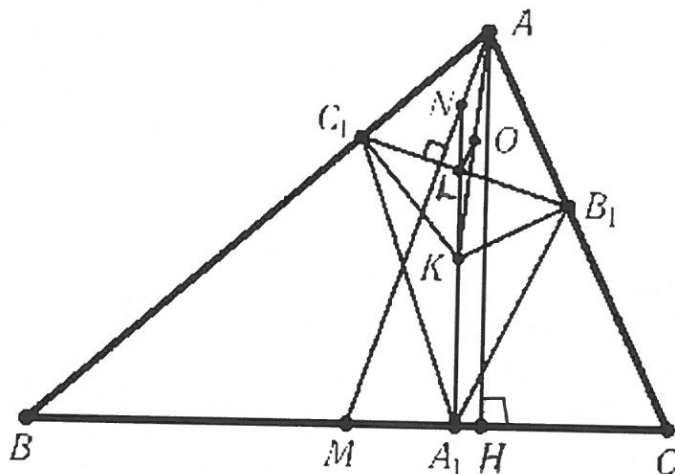
19/15

28.06.

3. (Третье определение точки Лемуана). Прямые, соединяющие середины сторон треугольника с серединами соответствующих высот, пересекаются в точке Лемуана.

(6,7 используются как вспомогательные задачи у этой)

(Dritte Definition des Lemoineschen Punktes). Die Verbindungsgeraden der Seitenmitten mit den Mittenpunkten der entsprechenden Höhen schneiden sich im Lemoineschen Punkt.



K: Lemoinescher Punkt

C_1, B_1, A_1 : Fußpunkte der Lote von K auf die Seiten

H: Fußpunkt der Höhe

L: Schnittpunkt C_1B_1 und dem verlängerten Lot KA_1

N: Schnittpunkt AM und dem verlängerten Lot KA_1

O: Mittelpunkt AK

M: Mittelpunkt BC

$$AM \perp C_1B_1$$

C_1AB_1K : Sehnenviereck

$$C_1L = LB_1, AO = OL$$

$$OL \perp B_1C_1$$

$$OL \parallel AM$$

$$NL = LK$$

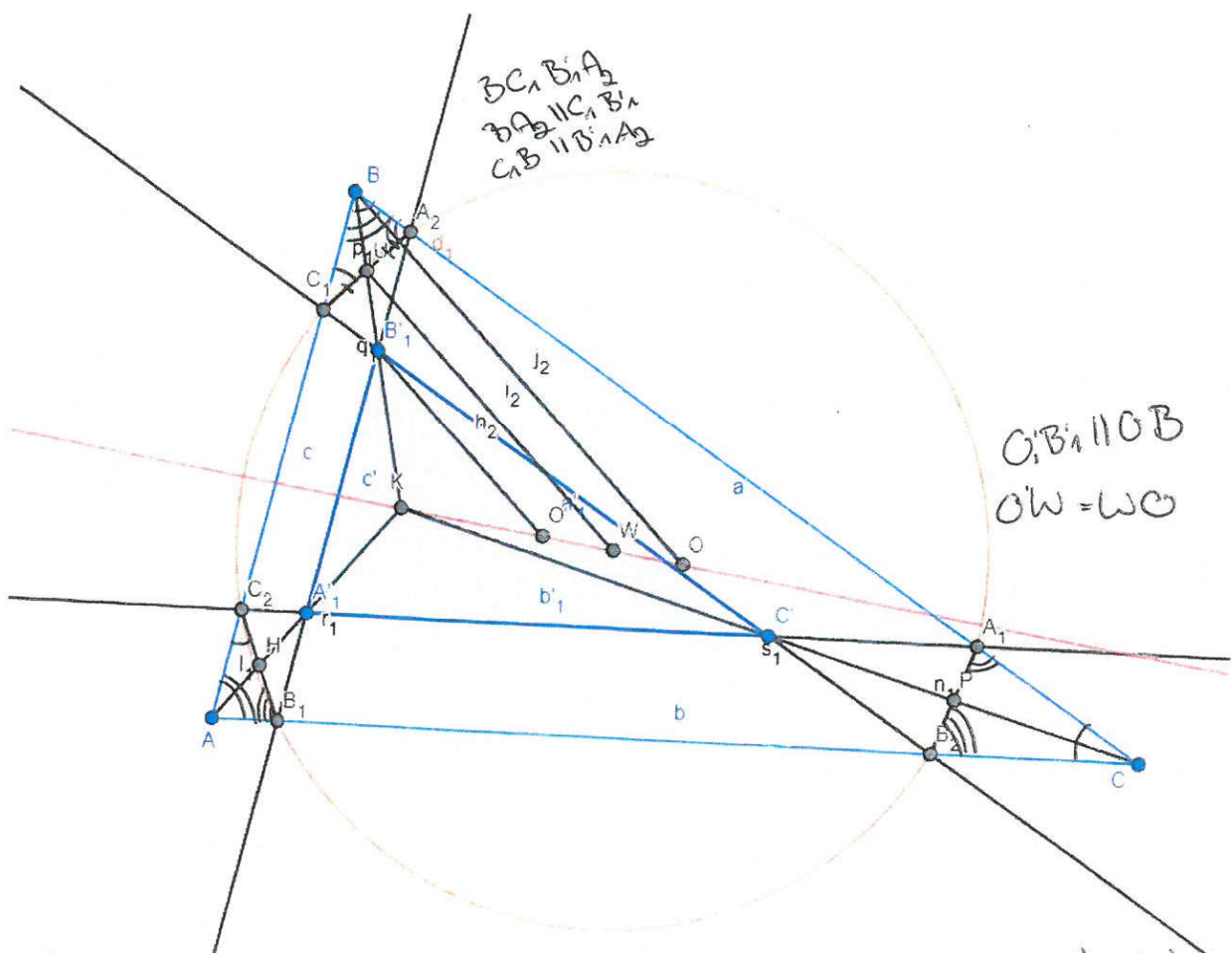
$$A_1K = 2LK$$

$$A_1K = KN$$

28.06.

4. Точки A_1 и A_2 , B_1 и B_2 , C_1 и C_2 лежат на сторонах BC , CA , AB треугольника ABC , если эти точки являются точками пересечения сторон треугольника ABC с продолжениями сторон треугольника $A'B'C'$, полученного из треугольника ABC при гомотетии с центром в точке Лемуана K , то точки $A_1, B_2, B_1, C_2, C_1, A_2$ лежат на одной окружности (окружность Тукера).

Das Dreieck $A'B'C'$ entsteht aus dem Dreieck ABC durch eine Zentrische Streckung mit dem Streckzentrum im Lemoineschen Punkt K . Die Schnittpunkte $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ der Verlängerungen der Seiten des Dreiecks $A'B'C'$ mit den Seiten des Dreiecks ABC liegen auf einem Kreis (Tuckerkreis)



$\triangle A_1 B_1 C_1$ ist $\triangle ABC$ am Punkt K zentrisch gestreckt
 $B_1 B_2, A_1 A_2, C_1 C_2$: Schnittpunkt der verlängerten Seiten $\triangle A_1 B_1 C_1$
 und $\triangle ABC$

Behauptung: Alle 6 Punkte liegen auf einem Kreis

$\angle BC_2 A = \angle C_2 B_1 A_1$ $\angle BC_1 A_2 = \angle C_1 A_2 B_1$
 $C_2 C_1 A_2 B_1, C_2 B_1 B_2 A_1, B_2 A_1 A_2 C_1$: Sehnenvierecke
 $OB B_1 O'$: Trapez & WP_1 ist Mittellinie

Datum: 28.06.

Chronist:

Fortsetzung der auf S. 17 abgebildeten Inhalte:

$$CA_2 \perp BO$$

$$WU \perp CA_2$$

$B_1C_2C_1A_2$ - W Mittelpunkt des Umkreises

$\Rightarrow W$ ist Mittelpunkt des Kreises

Wie viele Tuckerkreise können aus einem Dreieck entstehen?

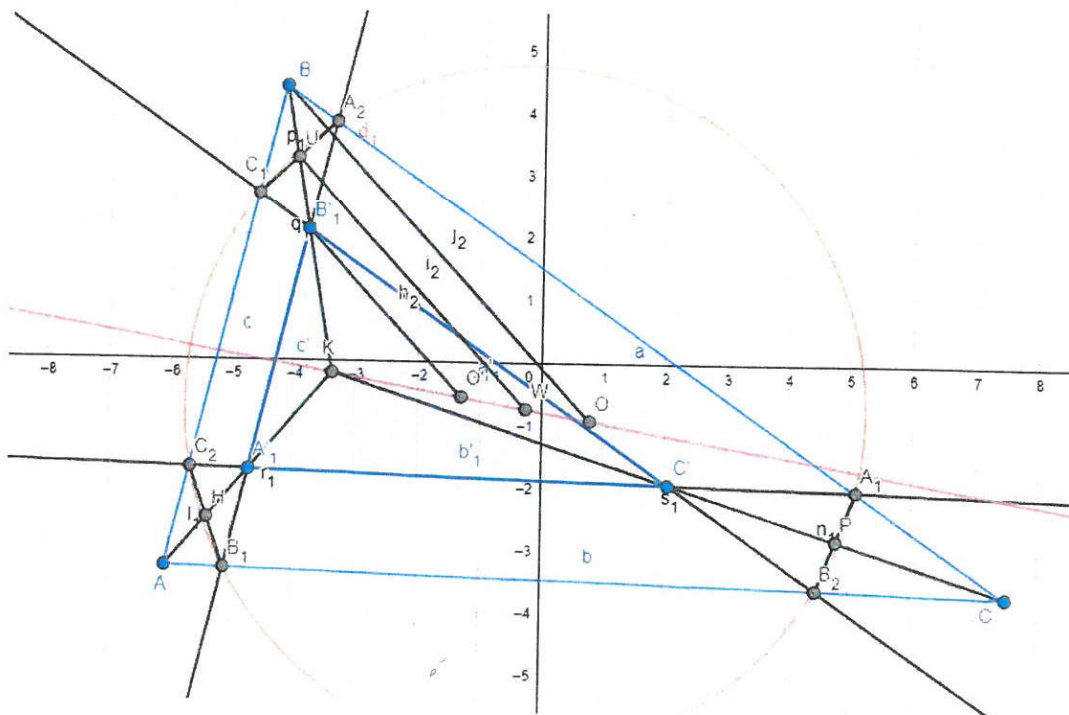
$\hookrightarrow$ unendlich viele

Welche Ortskurve haben ihre Mittelpunkte?

- 22 -

5. Центр окружности Тукера лежит на прямой KO , где K — точка Лемуана, O — центр описанной окружности.

Der Mittelpunkt des Tuckerkreises liegt auf der Geraden KO , mit K Lemoineschen Punkt und O der Mittelpunkt des Umkreises des Dreiecks ABC .



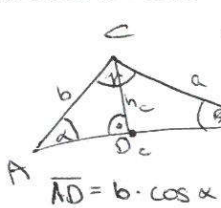
23/18

Datum: 30.06.

Chronist: Isabel Riepenhause

Napoleon-Dreieck/Punkt

cosinus-Satz



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha$$

Additionssatz für Cosinus
 $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$

$$\overline{B_1C} = \overline{AB_1} = \overline{CA}$$

B1

O_B

B₂

NA1

C₂

U

O_C

A

60°

C

A₂

O_A

A1

B

C1

60°

A

B

C

A

B

C

A

B

C

A

B

C

A

B

C

A

B

C

A

B

C

A

B

C

F: Fermat-Punkt
 $\rightarrow \overline{CF} + \overline{BF} + \overline{AF}$ ist minimal

$\triangle O_A O_B O_C$ bleibt immer gleichseitig
 $\rightarrow$ das äußere Napoleonsche Dreieck

C

a

B

b

c

30°

30°

30°

30°

30°

30°

30°

30°

30°

30°

30°

30°

30°

30°

30°

30°

30°

30°

30°

30°

$$\angle O_B A O_C = \alpha + 60^\circ$$

$$\frac{AO_B}{AO_C} = \frac{b}{c}$$

$$\frac{AO_B}{AO_C} = \frac{b}{c}$$

$$\frac{AO_B}{AO_C} = \frac{b}{c}$$

$$\frac{AO_B}{AO_C} = \frac{b}{c}$$

$$\frac{AO_B}{AO_C} = \frac{b}{c}$$

$$\frac{AO_B}{AO_C} = \frac{b}{c}$$

$$\frac{AO_B}{AO_C} = \frac{b}{c}$$

$$\frac{AO_B}{AO_C} = \frac{b}{c}$$

$$\frac{AO_B}{AO_C} = \frac{b}{c}$$

$$\frac{AO_B}{AO_C} = \frac{b}{c}$$

$$\frac{AO_B}{AO_C} = \frac{b}{c}$$

$$\frac{AO_B}{AO_C} = \frac{b}{c}$$

$$\frac{AO_B}{AO_C} = \frac{b}{c}$$

$$\frac{AO_B}{AO_C} = \frac{b}{c}$$

$$\frac{AO_B}{AO_C} = \frac{b}{c}$$

$$\frac{AO_B}{AO_C} = \frac{b}{c}$$

$$\frac{AO_B}{AO_C} = \frac{b}{c}$$

$$\frac{AO_B}{AO_C} = \frac{b}{c}$$

$$\frac{AO_B}{AO_C} = \frac{b}{c}$$

$$\frac{AO_B}{AO_C} = \frac{b}{c}$$

$$\overline{CA_1} = \overline{AB} = \overline{CB}$$

O_A, O_B, O_C
sind Zentren
der Dreiecke
 $\triangle A_1CB, \triangle C_1BA,$
 $\triangle B_1AC$

$$\overline{AC_1} = \overline{C_1B} = \overline{AB}$$

U-Umkreis-
mittelpunkt
($\overline{O_A O_C}, \dots$
sind
Mittelsenkrechten)

$$\overline{O_B O_C}^2 = \overline{O_C O_A}^2 = \overline{O_A O_B}^2$$

$$\Rightarrow \overline{O_B O_C} = \overline{O_C O_A} = \overline{O_A O_B}$$

Flächeninhalt eines
Dreiecks

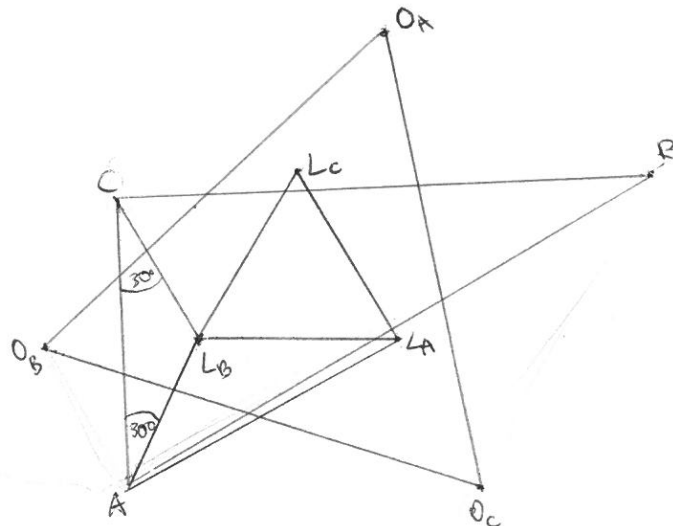
$$6 \cdot \overline{O_B O_C}^2 = 2b^2 + 2c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha + 2\sqrt{3}bc \sin \alpha$$

nicht abhängig von a, b oder c
(symmetrisch)

Datum: 30.06.

Chronist: Isabel Riepenhausen

Über 3000 besondere Punkte im Dreieck

Napoleon Dreieck / Punkt

L_c, L_b, L_a
sind die
Spiegelpunkte
von
 O_c, O_b, O_a
an der Seite von
 $\triangle ABC$

$\triangle L_a L_b L_c$: innere napoleonsche Dreieck

$$6 \cdot \overline{L_a L_b}^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 4\sqrt{3} A_{\triangle ABC} = (\text{analog zu } \triangle O_a O_b O_c)$$

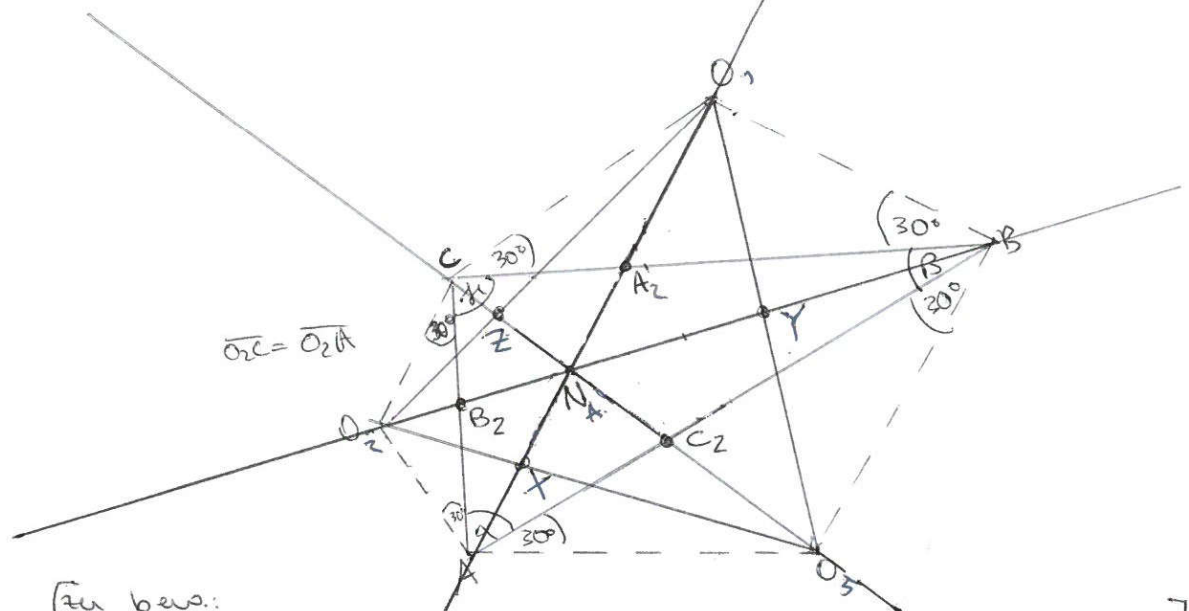
$$6 \cdot \overline{O_a O_b}^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 4\sqrt{3} (ABC)$$

$$\underbrace{(\triangle O_a O_b O_c)}_{A_{\triangle O_a O_b O_c}} - (\triangle L_a L_b L_c) = \frac{\sqrt{3}}{4} \overline{O_a O_b}^2 - \frac{\sqrt{3}}{4} \overline{L_a L_b}^2 = (ABC)$$

Die Differenz der Flächeninhalte aus
inneren und äußeren napoleonschen Dreiecks
ist der Flächeninhalt des Dreiecks $\triangle ABC$.

Datum: 30.06.

Chronist: Isabel Riepenhausen

Napoleonischer Punkt

zu bew.:
Mittelpunkte der Dreiecke $AO_1O_2O_3$ und $A_1A_2A_3$ fallen
aufeinander

N_A : Napoleon-Punkt (Schnittpunkt von BO_2 , AO_1 , CO_3)
auch: Napoleonscher äußerer Punkt

Beweis der Existenz:

S. v. Ceva: $\frac{\overline{CB_2}}{\overline{B_2A}} \cdot \frac{\overline{AC_2}}{\overline{C_2B}} \cdot \frac{\overline{BA_2}}{\overline{A_2C}} = ?$

$$\frac{\overline{CB_2}}{\overline{B_2A}} = \frac{(O_2CB)}{(O_2AB)} = \frac{\frac{1}{2} \overline{O_2C} \cdot a \cdot \sin(\gamma + 30^\circ)}{\frac{1}{2} \overline{O_2A} \cdot c \cdot \sin(\alpha + 30^\circ)} = \frac{a \cdot \sin(\gamma + 30^\circ)}{c \cdot \sin(\alpha + 30^\circ)}$$

$$\frac{\overline{AC_2}}{\overline{C_2B}} = \frac{(O_3AC)}{(O_3BC)} = \frac{b \cdot \sin(\alpha + 30^\circ)}{a \cdot \sin(\beta + 30^\circ)}$$

$$\frac{\overline{BA_2}}{\overline{A_2C}} = \frac{(O_1AB)}{(O_1AC)} = \frac{c \cdot \sin(\beta + 30^\circ)}{b \cdot \sin(\gamma + 30^\circ)}$$

$$\frac{\overline{CB_2}}{\overline{B_2A}} \cdot \frac{\overline{AC_2}}{\overline{C_2B}} \cdot \frac{\overline{BA_2}}{\overline{A_2C}} = \frac{a \cdot \sin(\gamma + 30^\circ)}{c \cdot \sin(\alpha + 30^\circ)} \cdot \frac{b \cdot \sin(\alpha + 30^\circ)}{a \cdot \sin(\beta + 30^\circ)} \cdot \frac{c \cdot \sin(\beta + 30^\circ)}{b \cdot \sin(\gamma + 30^\circ)} = 1$$

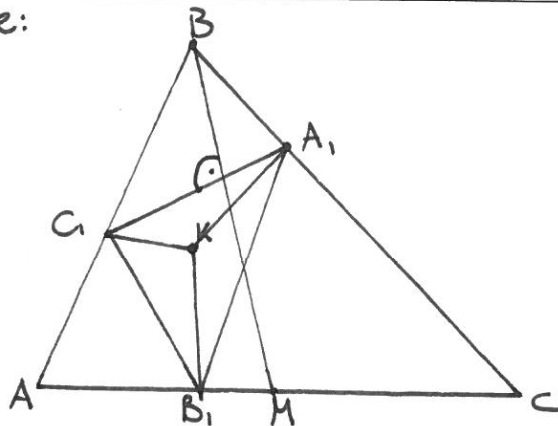
q.e.d.

analog zum inneren Napoleonischen Punkt nur anstatt $\alpha + 30^\circ$
 $\alpha - 30^\circ$
usw.

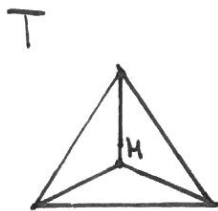
Datum: 30.6.19

Chronist: Liv Dennig

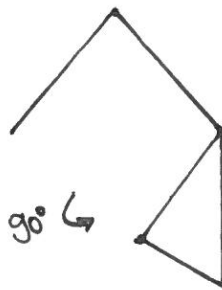
Skizze:



BM - Seitenhalbierende
K - Lemoanischer Punkt
 $BM \perp A_1C_1$



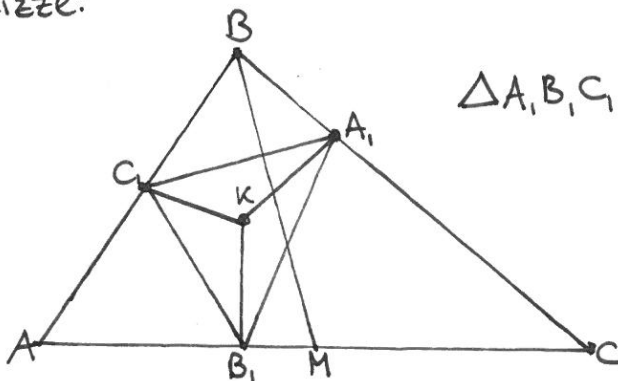
T_1



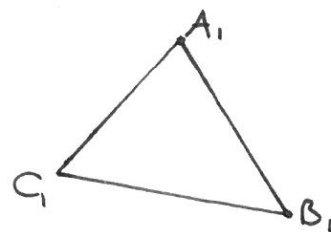
Hilfe

Beweis: $BM \perp A_1C_1$

Skizze:



$\triangle A_1B_1C_1 \xrightarrow{90^\circ}$

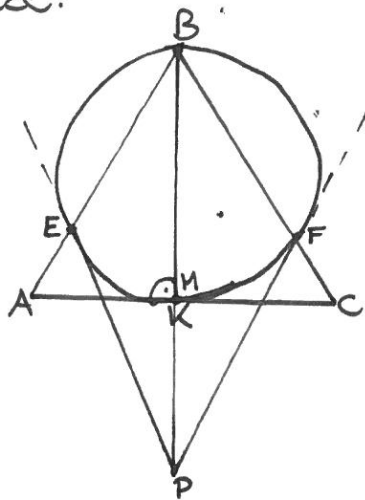


Nach dem Drehen kann erkannt werden, dass A_1C_1 parallel zu BM ist. Dies bedeutet, dass $BM \perp A_1C_1$, wenn das Dreieck $A_1B_1C_1$ wieder 90° zurück gedreht wird.

Datum: 30.6.19

Chronist: Liv Dennig

Skizze:



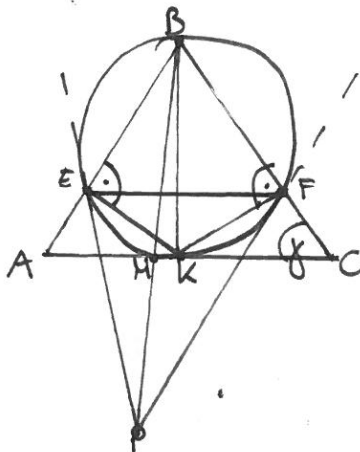
BK - Höhe

PE - Tangente

PF - Tangente

M - Schnittpunkt von BP und AC

Beweis: BM ist die Seitenhalbierende



EF und AC sind Antiparallele.

BP ist die Symmediane des Dreiecks BEF.

Weil BP die Symmediane des Dreiecks BEF ist und AC die Antiparallele zu EF ist, halbiert der Punkt M die Strecke AC und BM ist somit die Seitenhalbierende.



Datum: 01.07.19

Chronist: Yannick Möglich

Definitionen:

Massenpunkt

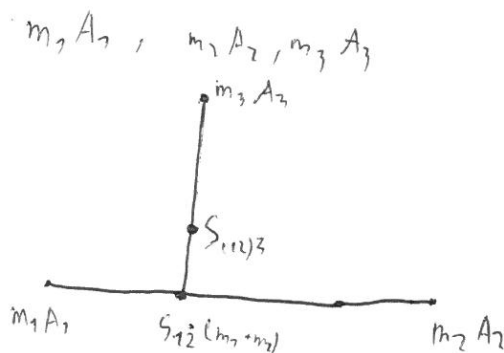
$$m \cdot A \quad m A$$

$$A_0: \{m_1 A_1, m_2 A_2, \dots, m_n A_n\}$$

$$A_1: S = m_1 A_1$$

$$A_2: m_1 A_1, m_2 A_2 \Rightarrow S$$

$$A_3: S \cup \{m_1 A_1, m_2 A_2, \dots, m_n A_n\} = S \cup \{S \cup \{m_1 A_1, \dots, m_k A_k\} \cdot (m_1 + m_2 + m_k), \dots, m_n A_n\}$$



$$S_{12} = S \{m_1 A_1, m_2 A_2\}$$

$$S_{(12)3} = S \{m_1 A_1, m_2 A_2, m_3 A_3\} = S \{(m_1 + m_2) \cdot S_{12}, m_3 A_3\}$$

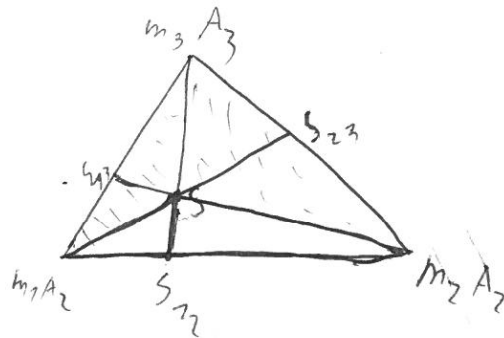
$$(m_1 + m_2) \overrightarrow{S S_{12}} + m_3 \overrightarrow{S A_3} = \vec{0}$$

$$\begin{aligned} (m_1 + m_2) \overrightarrow{S S_{12}} &= m_1 \overrightarrow{S S_{12}} + m_2 \overrightarrow{S S_{12}} \\ &= m_1 \overrightarrow{S A_1} + m_1 \overrightarrow{A_1 S_{12}} + m_2 \overrightarrow{S A_2} + m_2 \overrightarrow{A_2 S_{12}} \\ &= m_1 \overrightarrow{S A_1} + m_2 \overrightarrow{S A_2} \\ \Rightarrow m_1 \overrightarrow{S A_1} + m_2 \overrightarrow{S A_2} + m_3 \overrightarrow{S A_3} &= \vec{0} \end{aligned}$$

Datum: 01.07.

Chronist:

Yannick Möglich

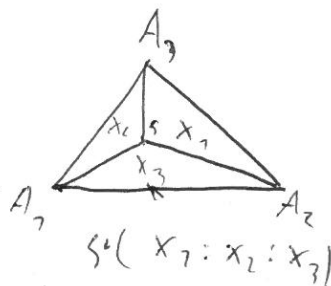


$$m_1 \overline{A_1 S_{12}} = m_2 \overline{S_{12} A_2}$$

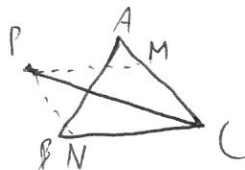
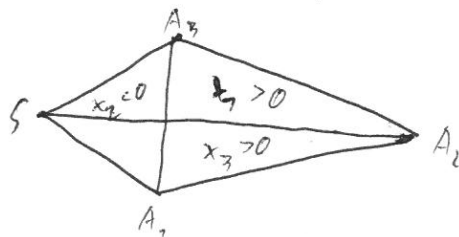
$$\frac{\overline{A_1 S_{12}}}{\overline{S_{12} A_2}} = \frac{m_2}{m_1} = \frac{(A_1 A_3 S_{12})}{(S_{12} A_3 A_2)} = \frac{(A_1 S S_{12})}{(S_{12} S A_2)} = \frac{(A_1 S A_3)}{(A_2 S A_3)}$$

$$m_1 : m_2 : m_3 = (A_2 S A_3) : (A_1 S A_3) : (A_1 S A_2)$$

#



$$x_1 + x_2 + x_3 = (A_1 A_2 A_3)$$



$$\vec{CP} = \alpha \vec{CA} + \beta \vec{CB}$$

$$\vec{CM} = \alpha \vec{CA}$$

$$\vec{CN} = \beta \vec{CB}$$

$$\vec{OP} - \vec{OC} = \alpha(\vec{OA} - \vec{OC}) + \beta(\vec{OB} - \vec{OC})$$

$$\vec{P} - \vec{C} = \alpha(\vec{a} - \vec{c}) + \beta(\vec{b} - \vec{c})$$

$$\vec{P} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b} + (1 - \alpha - \beta) \vec{c}$$

$$\gamma = 1 - \alpha - \beta$$

Datum: 01.07.

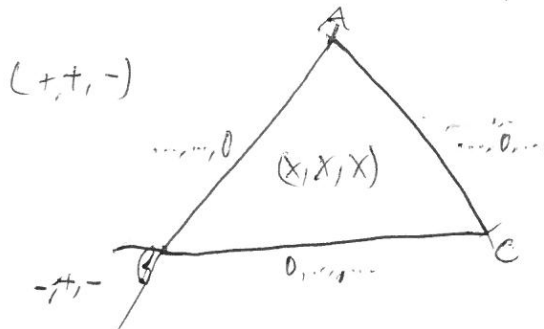
Chronist: Yannick Möglich

$$\vec{r} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b} + \gamma \vec{c}$$

$$P(\alpha:\beta:\gamma)$$

$$\alpha = m_1; \beta = m_2; \gamma = m_3$$

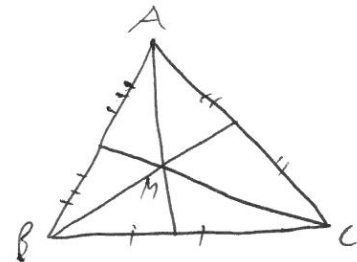
$$\alpha + \beta + \gamma = 7$$



$$A(1;0;0) = (LABC; 0;0)$$

$$B(0;1;0)$$

$$C(0;0;1)$$



$$(BM) = (CM) = (AM)$$

$$M(LMB):(AM):(BMA) = \left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right) = (1:1:1)$$

$$(B|C) = \frac{1}{2} r \cdot BC = \frac{1}{2} r \cdot a$$

$$(C|A) = \frac{1}{2} r \cdot b$$

$$(A|B) = \frac{1}{2} r \cdot c$$

$$S(a:b:c)$$

$$(BOC) = \frac{1}{2} R^2 \cdot \sin(\alpha)$$

$$O(\sin(2\alpha) : \sin(2\beta) : \sin(2\gamma))$$

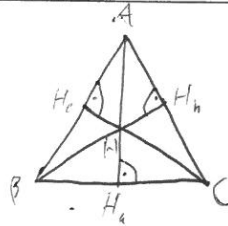
$$\sin(2\alpha) = 2 \sin(\alpha) \cos(\alpha)$$

$$2 \sin(\alpha) \cos(\alpha) = 2 \cdot \frac{a}{2R} \cdot \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{a^2(b^2 + c^2 - a^2)}{2Rabc}$$

$$O(a^2(b^2 + c^2 - a^2) : b^2(c^2 + a^2 - b^2) : c^2(a^2 + b^2 - c^2))$$

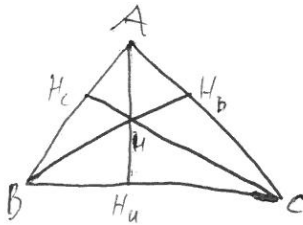
Datum: 01.07.

Chronist: Yannick Möglich



$$\begin{aligned}
 [BHC] &= \frac{1}{2} BH \cdot HC = \sin(\angle BHC) = \sin(\beta + \gamma) \\
 &= \frac{1}{2} BH \cdot HC \cdot \sin(\alpha) = \frac{1}{2} \cdot \frac{BH_a}{\sin(\gamma)} \cdot \frac{H_a C}{\sin(\beta)} \cdot \sin(\alpha) \\
 &= \frac{1}{2} \frac{AB \cdot \cos(\beta)}{\sin(\gamma)} \cdot \frac{AC \cdot \cos(\gamma)}{\sin(\beta)} \cdot \sin(\alpha) \\
 &= \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin(\alpha) \cdot \frac{\cos(\beta)}{\sin(\beta)} \cdot \frac{\cos(\gamma)}{\sin(\gamma)} \\
 &= \frac{[ABC]}{\tan(\beta) \tan(\gamma)} = \tan(\alpha) \frac{[ABC]}{\tan(\beta) \tan(\gamma) \cdot \tan(\alpha)}
 \end{aligned}$$

$$H(\tan(\alpha) : \tan(\beta) : \tan(\gamma))$$



$$\frac{BH_a}{CH_a} = \frac{\frac{AH_a}{\tan(\beta)}}{\frac{AH_a}{\tan(\gamma)}} = \frac{\tan(\gamma)}{\tan(\beta)}$$

$$\frac{m_b}{m_c} = \frac{\tan(\beta)}{\tan(\gamma)} ; \frac{m_c}{m_a} = \frac{\tan(\alpha)}{\tan(\gamma)} ; \frac{m_a}{m_b} = \frac{\tan(\alpha)}{\tan(\beta)}$$



$$m_a : m_b : m_c = \tan(\alpha) : \tan(\beta) : \tan(\gamma)$$

$$a = x + z ; b = y + x , c = x + y$$

$$x = \frac{a+c-b}{2} \quad y = \frac{b+c-a}{2} \quad z = \frac{a+b-c}{2}$$

$$\frac{m_b}{m_c} = \frac{z}{x} ; \frac{m_c}{m_a} = \frac{y}{z} ; \frac{m_a}{m_b} = \frac{x}{y}$$

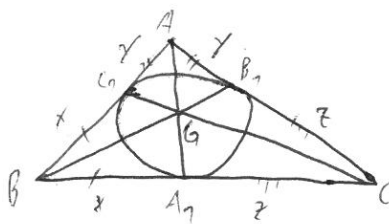
$$m_a : m_b : m_c = x \cdot z : y \cdot z : x \cdot y$$

$$z \cdot x : y \cdot z : x \cdot y$$

$$\left(\frac{a+b-c}{2} \cdot \frac{a+c-b}{2} \right) : \left(\frac{b+c-a}{2} \cdot \frac{a+b-c}{2} \right) : \left(\frac{a+c-b}{2} \cdot \frac{b+c-a}{2} \right)$$

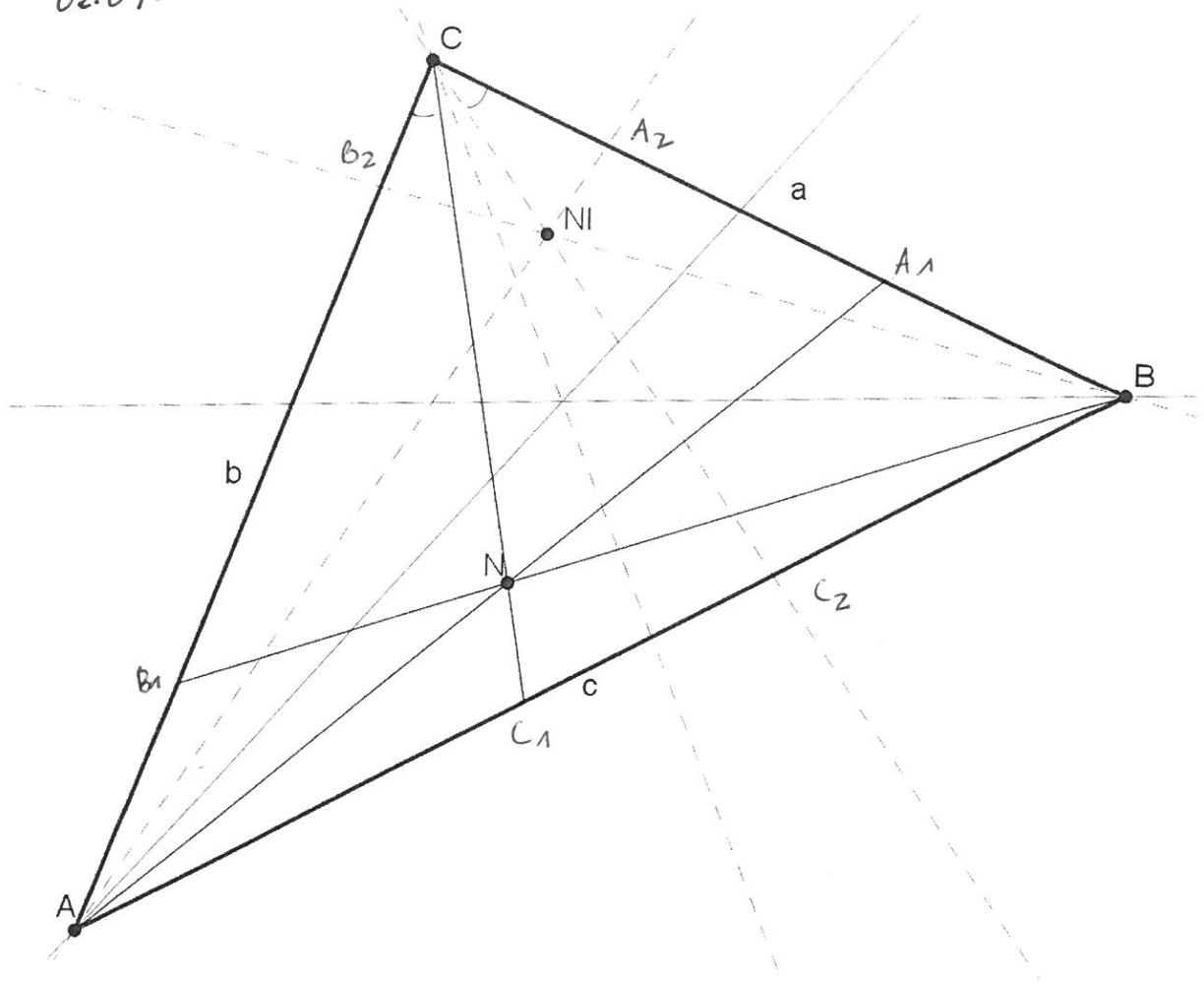
$$p = \frac{a+b+c}{2}$$

$$G\left(\frac{1}{p-a} : \frac{1}{p-b} : \frac{1}{p-c}\right)$$



02.07.

Katharina Köppe



$$3) \frac{\sin \alpha_1 \cdot \sin \beta_1 \cdot \sin \gamma_1}{\sin \alpha_2 \cdot \sin \beta_2 \cdot \sin \gamma_2} = 1$$

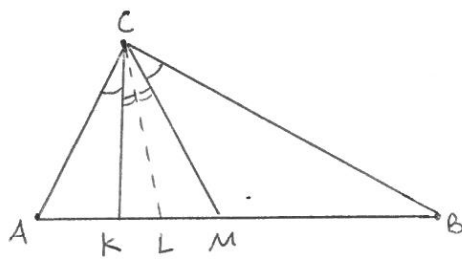
weil die Winkel um ihre Plätze tauschen (Zählen und Nennen)
schneiden sie sich auch an einem Punkt.

II) Wenn ein Punkt aus einem anderen folgt, heißt das Isogonal konjugierte

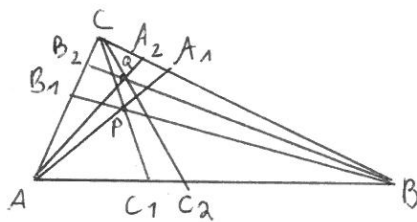


Datum: 2.07.19

Chronist: Katharina Köppe

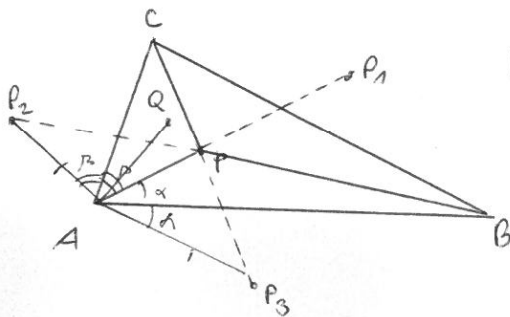


$\overline{CK}$ = Extraneale
 $\overline{CL}$ = Winkelhalbierende
 $\overline{CM} = \overline{CK}$ an $\overline{CL}$ gespiegelt



Die Extraneale werden gespiegelt.
 Wir wollen zeigen, dass diese sich an
 einem Punkt schneiden.

(Siehe Abbildung auf Extra
 Blatt)

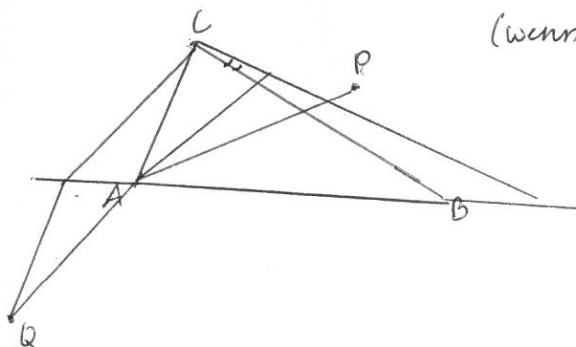


P wird an Seiten gespiegelt
 Es wird bewiesen dass Q die Schnittpunkte
 der gespiegelten P sind.

$$\angle P_2 A P_3 = 2\alpha + 2\beta$$

$$\angle P_2 A Q = \alpha + \beta$$

$$\angle CAQ = (\alpha + \beta) - \beta$$

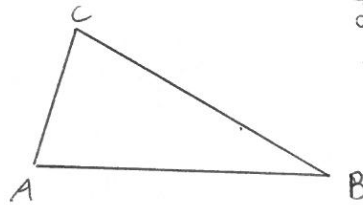


(wenn P außerhalb des $\triangle ABC$ liegt)

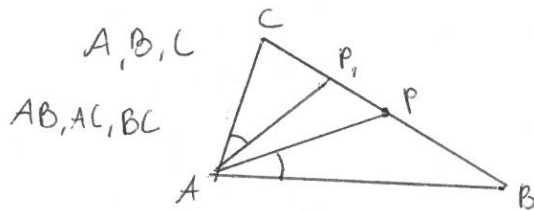
Datum: 02.07.

Chronist: Katharina Köppe

① A, B, C



Jede Ertrasmersale geht durch punkt A was bedeutet dass es für A keine dritte Ertrasmersale gibt. Für die Erspunkte gilt es also nicht.

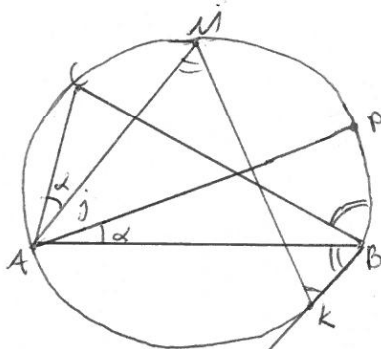


$AP \rightarrow AP_1$
 $CP \rightarrow CA$
 $BP \rightarrow BA$

haben 3. B den Punkt A
gemeinsam aber Punkt A
ist nicht der einzige Punkt
auf AC

$\Rightarrow$ Alle Punkte auf der Gerade, außer Erspunkt spiegeln sich auf der gegenüber liegende Gerade.

Es ist nicht eine eindeutige Abbildung aber fast alle Punkte sind ein-eindeutlich



(P liegt auf Unkreis)

$$\alpha + j = \beta$$

$$\angle MAB = \beta$$

$$\angle MKB = \angle MAB$$

$\Rightarrow$ Es würde nicht der Fall sein aber wir
lage zwei Parallel schneiden sich im
Unendlichen



treffen sich beide aber an unterschiedlichen Punkten

Es ist ein eindeutig weil Punkt einen bestimmten Punkt Q im ∞ gibt.

$\Rightarrow$ mit aufnahme des ersten Falls ist Q ein-eindeutlich

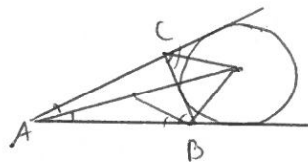
Datum: 02.07.

Chronist: Katharina Köppe

② Unbewegliche Punkte

3. B. a) Wenn die Ecktransversale die Winkelhalbierende ist

b)



Weil 50° gespiegelt nur andersrum ist, gehen die Punkte in einander

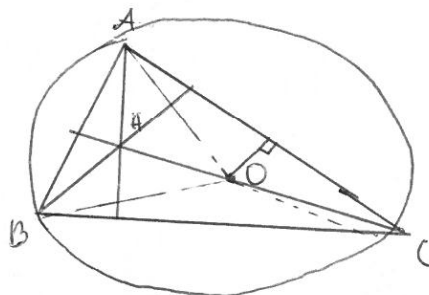
J, J_a, J_b, J_c

⚡ Bei anderen Strecken geht mindestens ein Punkt in einen anderen über. Es gibt also nur zwei unbewegliche Punkte.

③

Was passiert mit den Schnittpunkten der Höhen?

$\Rightarrow$ Es geht in den Umkreismittelpunkt O um



$$\angle BAH = 90^\circ - \beta$$

$$\angle AOH = 2\beta$$

$$\angle OAC = 90^\circ - \beta$$

bei allen Ecken analog

Was passiert mit dem Punkt O ?

$\Rightarrow$ Es geht in den Punkt H über. (weil Punkt $P \rightarrow$ Punkt Q geht)

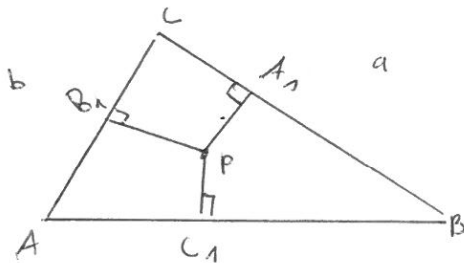
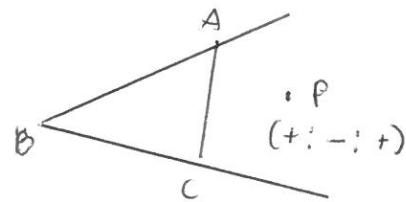
Was passiert mit dem Schwerpunkt? (Schnittpunkt der Seitenhalbierenden)

$\Rightarrow$ Es geht in den Schnittpunkt der Symmedianen über. (Lemoinepunkt)

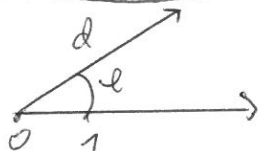
Datum: 02.07.

Chronist:

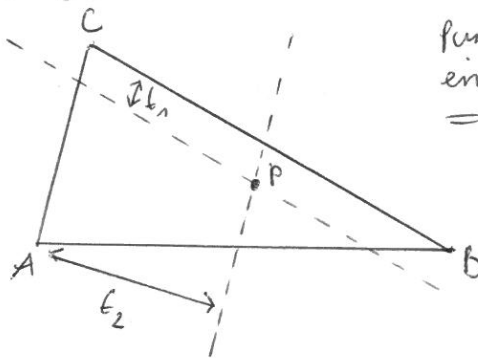
Katharina Köppe

Trilineare Koordinaten (einer gegebenen $\triangle ABC$) $P(t_1; t_2; t_3)$ Man kann mehr Punkte außerhalb des $\triangle ABC$ betrachten

Wenn P auf eine Seite liegt ist die Koordinate entsprechend 0.

Polar Koordinaten $(d; \varphi)$ $0 \leq \varphi < 360^\circ$
 $d > 0$

(2 Zahlen bestimmen einen Punkt)

 $P(t_1; t_2; t_3)$ 

Punkt ist mit 2. Koordinaten schon eindeutig

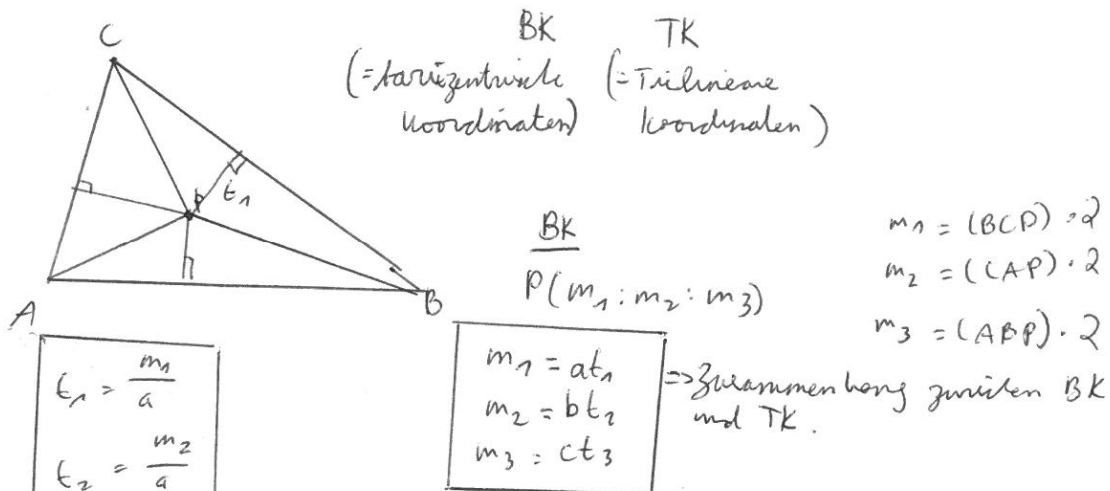
 $\Rightarrow$ 3. Zahl ist nicht notwendig $P(t_1; t_2; t_3)$ (Punkt existiert nicht wenn $t_3 \neq t_3'$ ist)z.B. $3:4:1$ wie schon Punkt konstruieren
3. Koordinate ist 1. $3:4:2$ kann das z.B. nicht existieren

Dritte Koordinate spielt später bei der Anwendung eine Rolle.

Datum: 02.07

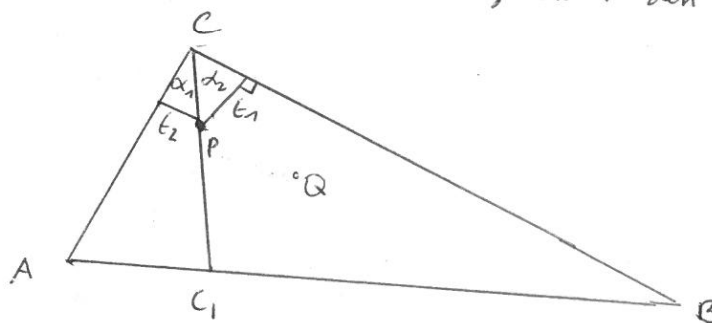
Chronist:

Katharina Köppe



$\Rightarrow$ Trilineare Koordinaten haben also auch einen eindeutigen Wert (bis zu einem positiven Wert/Faktor)

Uns interessiert das Verhältnis zwischen den Koordinaten



$$t_2 = CP \sin \alpha_1$$

$$t_1 = CP \sin \alpha_2$$

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{\sin \alpha_2}{\sin \alpha_1}$$

Wir spiegeln

Es kommt
der Kehrwert
zustande

$$Q(t_2 : t_1 : t_3)$$

$$Q\left(\frac{1}{t_2} : \frac{1}{t_1} : \frac{1}{t_3}\right)$$

$$Q\left(\frac{1}{t_2} : \frac{1}{t_1} : \frac{1}{t_3}\right)$$

$\Rightarrow$ Kehrwerte der
zahlen t_1 und
 t_2

$\Rightarrow$ gleicher Punkt,
können sich
nur durch einen
Faktor unter-
scheiden

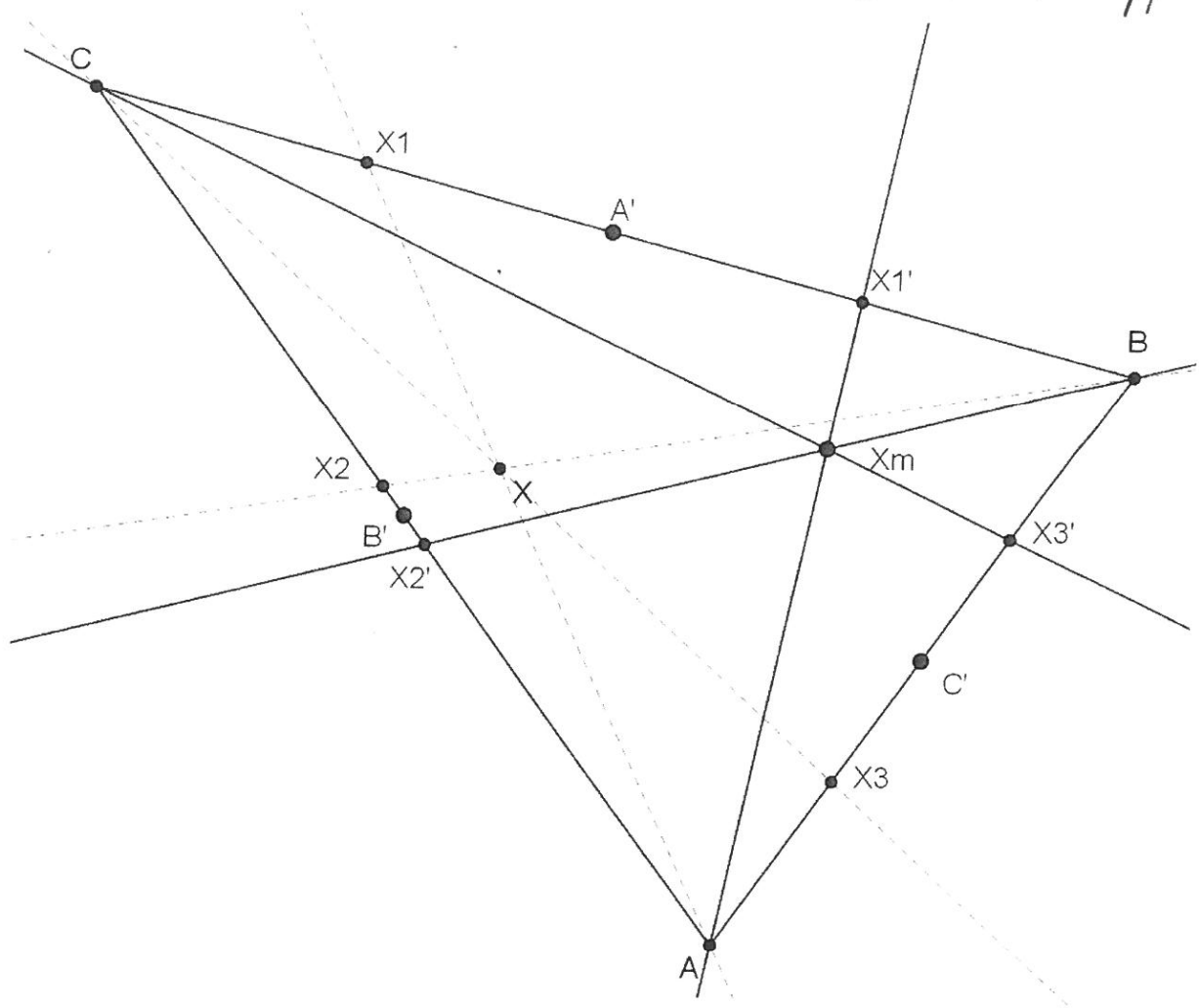
$$\Rightarrow P(t_1 : t_2 : t_3)$$

(Deshalb braucht man 3-B drei Koordinaten)

02.07.

Isotom konjugierte Punkte

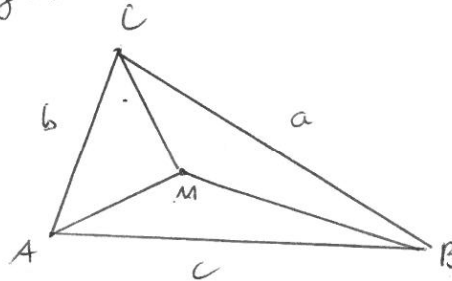
Katharina Köppe



Datum: 02.07.

Chronist: Katharina Köppe

So kann man gut die baryzentrischen Koordinaten des Lemoinspunktes zeigen.



$$\frac{BK}{TK} \\ M(1:1:1)$$

$$\frac{TK}{TK} \\ M\left(\frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}\right)$$

$$\frac{TK}{TK}$$

$$M \rightarrow L$$

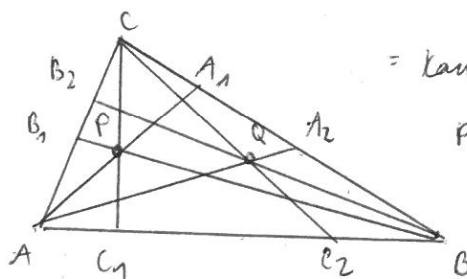
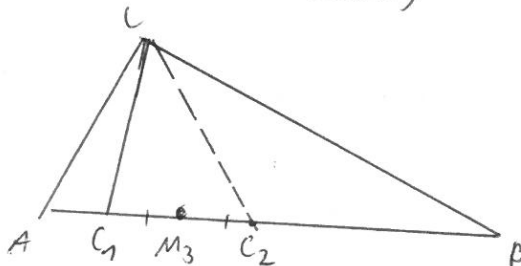
So kann die BK des Lemoinspunktes zeigen

$$L(a:b:c)$$

$$\frac{BK}{L(a^2:b^2:c^2)}$$

Zwischenbemerkung: Der LP hat genau die gleiche Eigenschaft aber mit den Summen der Quadrate der Abstände (zu den Eckdaten $4BACBC$ ist minimal)

Isotomische Konjugation
(siehe Extrablatt)



= kann man mit dem Satz von Ceva beweisen
P und Q heißen Isotomkonjugiert

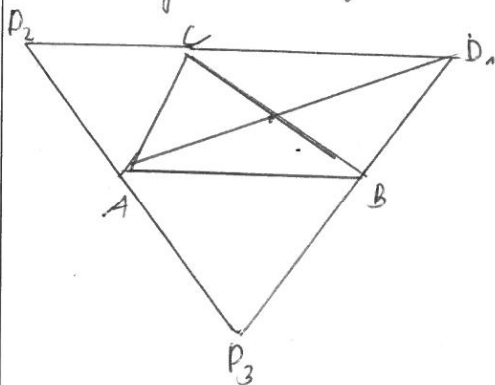
Zum Nachdenken: - sind die Punkte eindeutig und unbeweglich

Datum: 02.07.

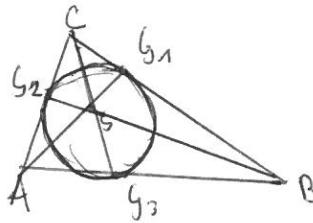
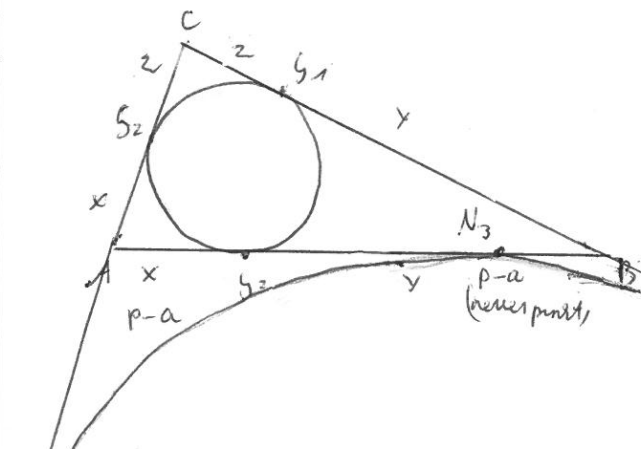
Chronist:

Katharina Köppe

was für Punkte gibt es also noch?


 M, D_1, D_2, D_3
 $\Rightarrow$ vier Fixpunkte

Auf welchen Punkt wird Gergonne Punkt gespiegelt?

 $\Rightarrow$ Nagel Punkt

$$x + y = c$$

$$x + z = b$$

$$y + z = a$$

$$2(x + y + z) = a + b + c$$

$$2(x + y + z) = 2p$$

$$x + y + z = p$$

$$x = p - a$$

Aufgabe: BKWZOTOM: $P \leftrightarrow Q$

$$P(m_1 : m_2 : m_3)$$

$$Q\left(\frac{1}{m_1} : \frac{1}{m_2} : \frac{1}{m_3}\right)$$