



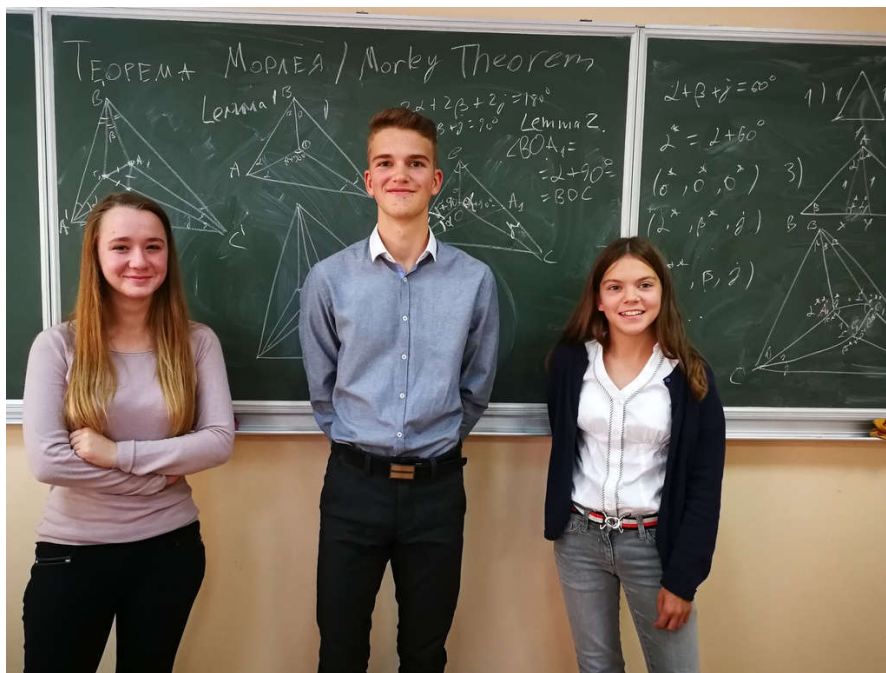
Математическая летопись ДЕСЯТОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБМЕНА

ЛИЦЕЙ «НАУКОВА ЗМІНА»
Киев, Украина

ГИМНАЗИЯ ДЛЯ ОСОБО ОДАРЁННЫХ ДЕТЕЙ
Швебиш Гмюнд, Германия

"Нестандартные методы решения математических задач"

19. – 26.09.2019 – немецкая группа в Украине



Mathematische Chronik des 10. LGH - MATHE - SPRACH – AUSTAUSCHES

LANDESGYMNASIUM FÜR HOCHBEGABTE
Schwäbisch Gmünd, Deutschland

LYZEUM „NAUKOVA ZMINA“
Kiew, die Ukraine

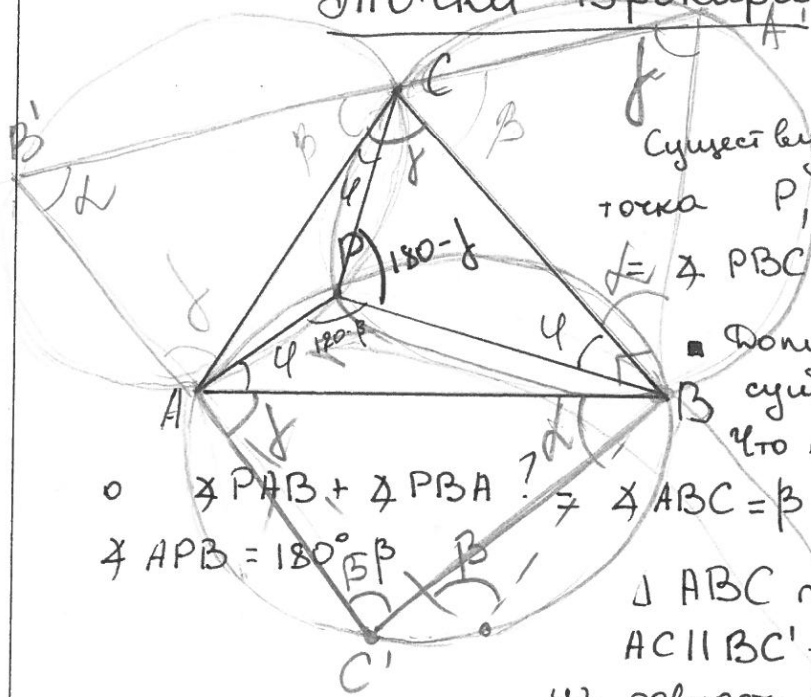
"Mathematische Lösungsstrategien"

19. – 26.09.2019 - Aufenthalt der deutschen Gruppe in der Ukraine

Дата: 20.09.2019

Летописец: Биша Анастасия

Наш первый урок начался с игры „Трио“

Точки Брокара

Существует ли такая точка P , что $\angle ACP = \angle PAB = \angle PBC = \varphi$?

■ Допустим, что она существует.

Что мы можем сказать

$$\angle PAB + \angle PBA = \angle ABC = \beta \Rightarrow$$

$$\angle APB = 180^\circ - \beta$$

$$\triangle ABC \sim \triangle A'BC'$$

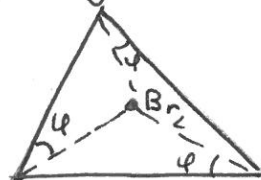
$AC \parallel BC'$ - первое следствие из равенств φ .

Применив ту же аналогию к другим парам углов. $\angle ACP = \angle PBC = \varphi$

$$\angle PBC + \angle PCB = \angle ACB = \gamma \Rightarrow \angle BPC = 180^\circ - \gamma$$

Мы получили алгоритм, из которого следует, что два описанных круга пересекаются в двух точках, одна из которых - вершина $\triangle ABC$, а вторая - точка Брокара.

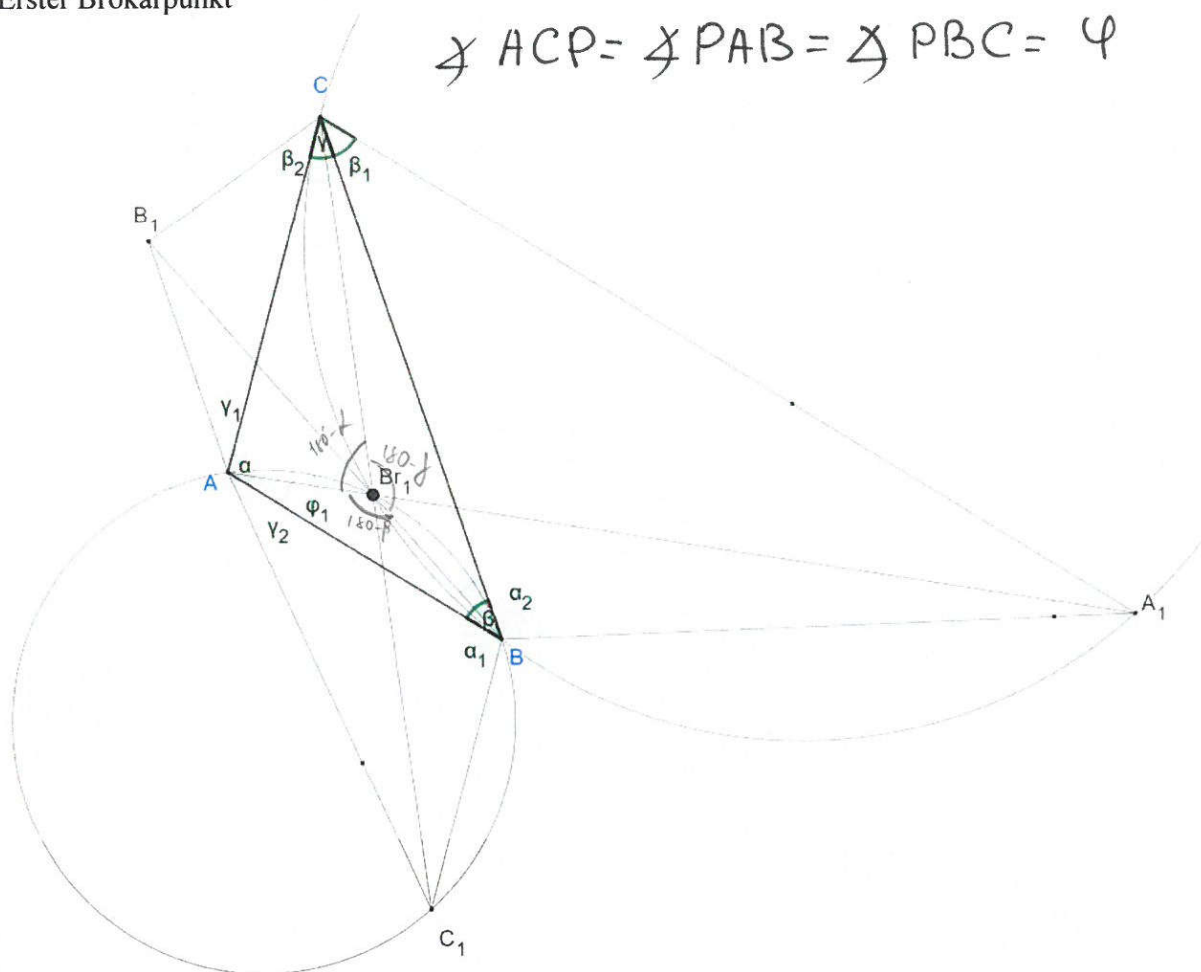
Из этого мы можем понять, что существует ещё вторая точка Брокара.



Datum: 20.09.2019

Chronist: Була Анастасия

Erster Brokarpunkt

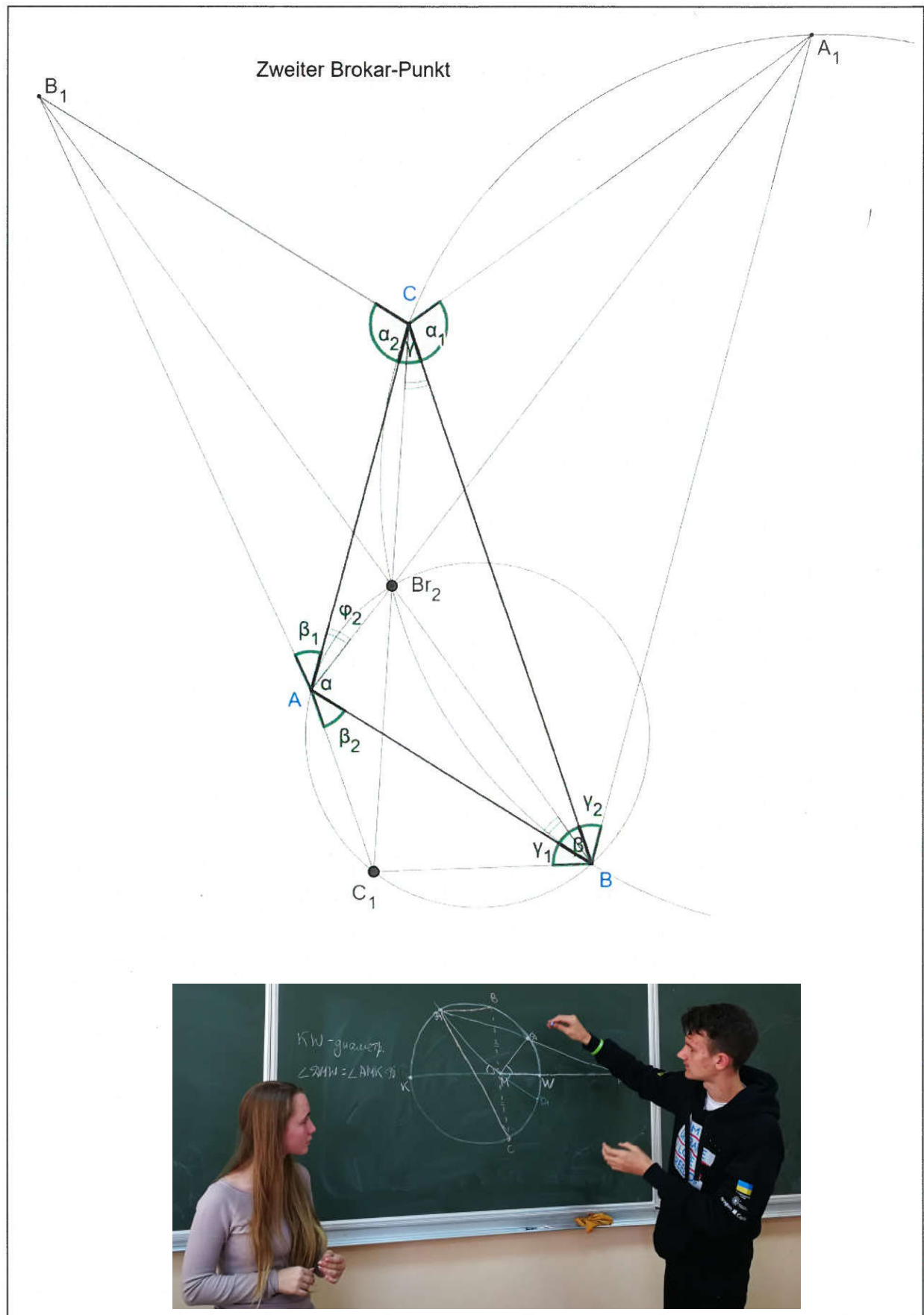


Алгоритм

1. Строим подобные Δ к ΔABC , где третья вершина лежит на описанной окружности маленького Δ
2. Углы обозначим φ и проверим наш треугольник
3. Т.к. окружности пересекаются в 2х точках, то они пересекутся не только в т.В, а ещё в одной. Назовем её первой точкой Брокара

Datum:

Chronist:



Дата: 20.09.2019

Летописец: БИЛА Анастасия

Задача 1: Доказать, что точка Брокара лежит на прямой CC_1 .

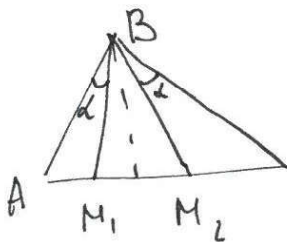
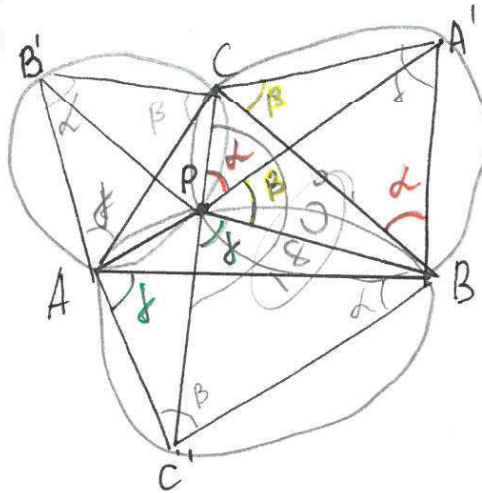
$$\angle CPA' = \alpha \text{ (дуга } A'C)$$

$$\angle A'PB = \beta \text{ (дуга } A'B)$$

$$\angle BPC' = \gamma \text{ (дуга } C'B)$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

$$\angle CPA' + \angle A'PB + \angle BPC' = 180^\circ.$$



Изогональное сопряжение.

Плоскости Брокара $B\alpha_1$ и $B\alpha_2$ изогонально сопряжены между собой.

Задача 2: найдите углы φ , выраженные через α, β, γ .

Испособ:

Теорема синусов:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

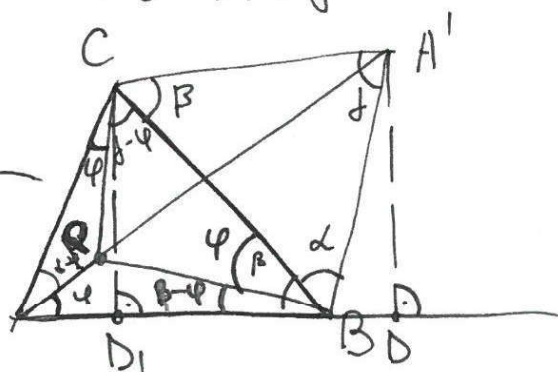
||

$$\triangle APB: \frac{AP}{\sin(\beta - \varphi)} = \frac{BP}{\sin \varphi}$$

$$\triangle BPC: \frac{BP}{\sin(\gamma - \varphi)} = \frac{PC}{\sin \varphi}$$

$$\triangle CPA: \frac{PC}{\sin(\alpha - \varphi)} = \frac{PA}{\sin \varphi}$$

$$\sin^3 \varphi = \sin(\alpha - \varphi) \cdot \sin(\beta - \varphi) \cdot \sin(\gamma - \varphi)$$



Дата: 20.09.2019

Летописец: Билл Анастасия

II способ

Продлим AB . $CA' \parallel AB$. Опустим перпендикуляр $A'D$.

$\triangle AA'D$ - прямоугольник $\Rightarrow$ можно найти φ

$$\cotan \varphi (\text{ctg } \varphi) = \frac{AD}{DA'} = \frac{AD_1 + D_1B + BD}{DA'} = \frac{AD_1}{DA'} + \frac{D_1B}{DA'} + \frac{BD}{DA'} =$$

$$D_1C = A'D$$

$$= \cotan \alpha + \cotan \beta + \cotan \gamma$$

- Hausaufgabe : 1) Доказать, что $\angle \varphi \leq 30^\circ$
 2) Доказать, что $\cotan \varphi = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4S}$
 3) A и B зафиксированы. Т.С движется так, что угол Брокера всегда одинаков. Как должна двигаться С?



Дата: 23.09.2019

Летописец: Биша Анастасия

Симедиана

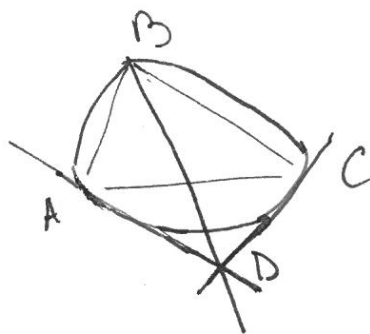
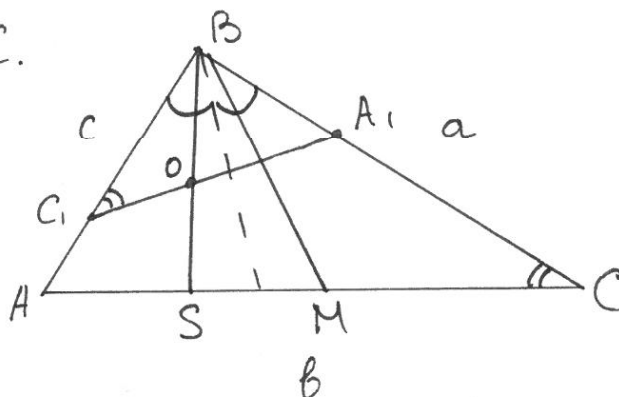
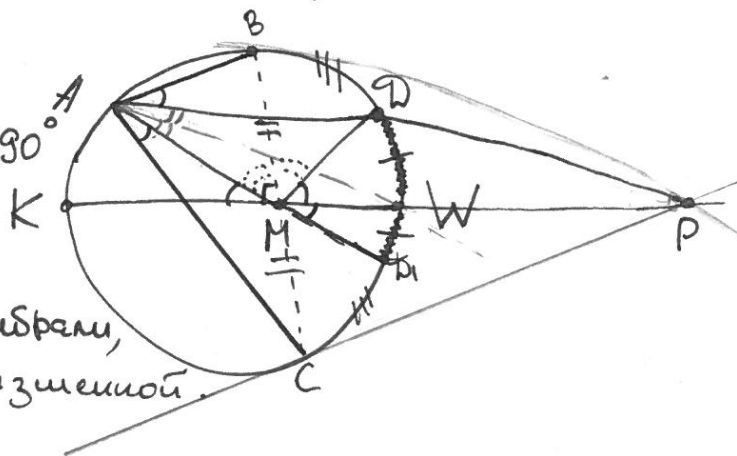
С.А, антипараллели AC.

1. $CO = OA_1$

2. $\frac{d(S; AB)}{d(S; BC)} = \frac{c}{a}$

$$\frac{S_{ABS}}{S_{BSC}} = \frac{AS}{SC} = \frac{c^2}{a^2}$$

3. Симедиана принадлежит BΩ

Задача 1KW-диаметр
 $\angle DMW = \angle AMK < 90^\circ$ Доказать,
что какие бы
A и D не выбрали,
Р останется неизменной.

- Проведём хорду $BC \perp KW$
- $BM = MC$
- $\triangle ABC$, где AM - медиана.
- $\angle CAM = \angle DAB (\Rightarrow \text{дуги } WD_1 \text{ и } DW \text{ равны})$

AD - симедиана; если провести, то она
попадает в т.Р, где пересек. касательные к
окружности $\Rightarrow$ Р фиксирована (В и С фикс.)

Дата: 23.09.2019

Летописец: Бина Анастасия

Cleaver

$$MB + BL = LC + CA + AM$$

Проведем биссектрису CC_1 . Теперь надо доказать, что $CC_1 \parallel ML$.
Выразим стороны и докажем подобие $\triangle MBL$ и $\triangle C_1BC$

$$MB = \frac{c}{2}; \quad \frac{BC_1}{CA} = \frac{a}{b}$$

$$BC_1 = c \frac{a}{a+b}$$

$$BL = p - \frac{c}{2} = \frac{a+b}{2}$$

$$BC = a$$

$$\frac{BM}{BL} = \frac{BC_1}{BC} \text{ — надо доказать.}$$

$$\frac{BM}{BL} = \frac{c}{2} \cdot \frac{2}{a+b} = \frac{c}{a+b}$$

$$\frac{BC_1}{BC} = \frac{ca}{a+b} \cdot \frac{1}{a} = \frac{c}{a+b}$$

$$M_1 M_2 \parallel AC;$$

$$M_3 M_2 \parallel AB;$$

$$M_1 M_3 \parallel BC.$$

Рассмотрим средний $\triangle$: M_1, M_2, M_3
Отметим равные углы.

Если мы проведем биссектрису CC_1 , то пересечем ее с $M_1 M_2$, то заметим, что $\angle C Q M_2 = \angle ABC = \angle M_1 M_2 M_3$
 $\angle BCQ = \angle QCA = \angle C Q M_2 = \angle L M_1 M_2 = \angle M_3 M_1 L$

✱

Теорема Хузен (Husel)

I_{ABC}, S, G_{ABC} (пересечение мед.)

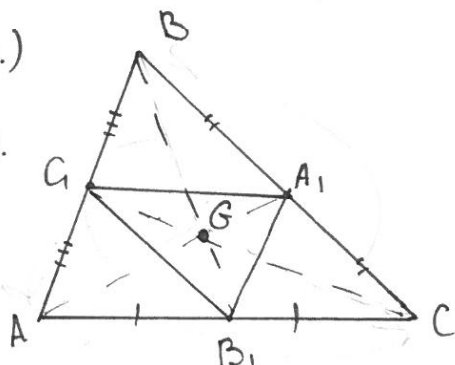
т. Шпикера — пересечение 3-х клевефов.

$G(-\frac{1}{2}; G_{ABC})$ — центетил

$A \rightarrow A_1, B \rightarrow B_1, C \rightarrow C_1$

$I \rightarrow S$

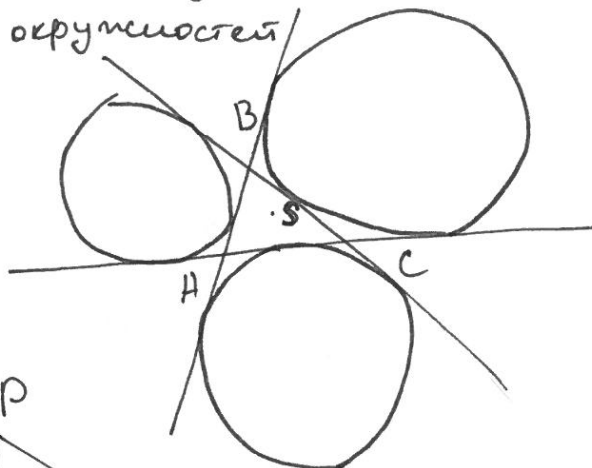
$I \text{ (2) } G \text{ (1) } S$



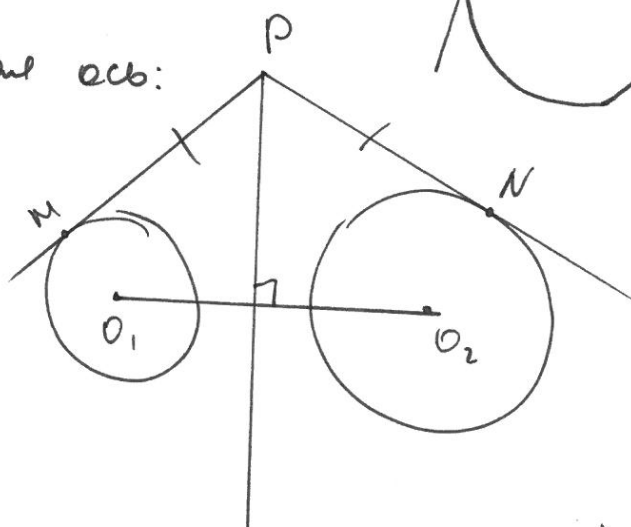
Дата: 23.09.2019

Летописец: Билия Анастасия

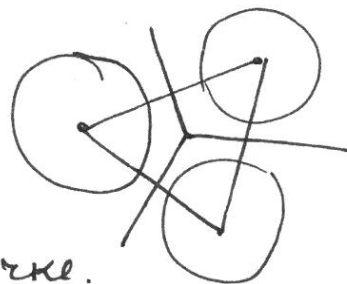
Ф/3 Свойство Штикера: доказать, что в произвольном Δ центр Штикера есть радикальным центром трех вневписанных окружностей



Радикальная ось:

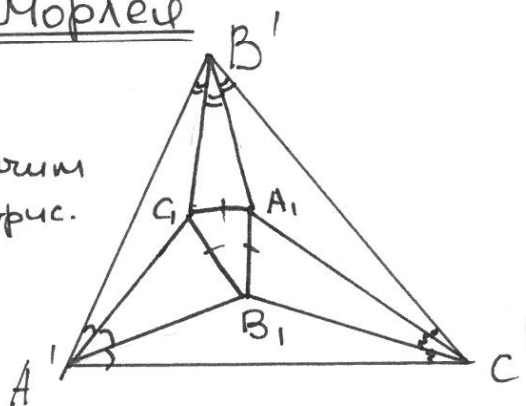


Для 3-х окружностей есть 3 радикальные оси, которые пересекаются в одной точке.



Теорема Морлея

ΔABC - произвольный.
Проведен 6 трисектрис. Обозначим т. пересечения смежных трисектрис.
Т. Морлея: $\Delta A_1B_1C_1$ - правильный



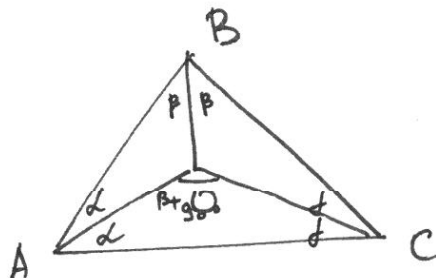
Дата: 23.09.2019

Летописец: Бино Анастасия

I Доказательство: змеш

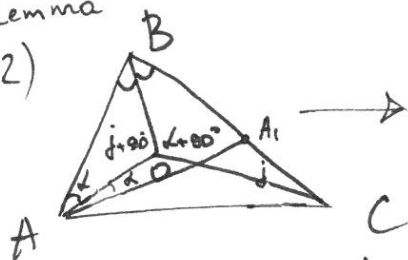
$$1) 2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 180^\circ$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 90^\circ$$



Lemma

2)



BO-биссектриса.

Покажем, что AO тоже.

Пусть это не так. Выберем такую A1, что AO-биссектриса AA1.

||

$$\angle BOA_1 = \alpha + 90^\circ, \text{ но в таком}$$

$$\text{случае } \angle BOA_1 = \angle BOC, \Rightarrow \text{ в таком}$$

случае т. A1 лежит на AC, но она лежит на BC, значит она совпадает с C $\Rightarrow$ AO-биссектриса BAC

Lemma

3)

KMN-равностор.

Построим Δ на сторонах x

$$\text{так, что } \angle NKB = \angle KAM + 60^\circ$$

$$\angle MKA = \angle KBN + 60^\circ$$

$$\angle AMK = \angle BNK$$

 ΔCMN -равнобедренный.

Соединим SK. SK-биссектриса

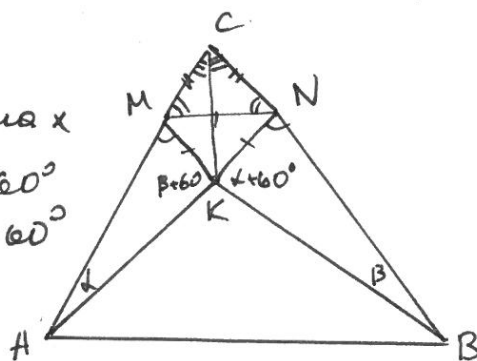
$$\angle MKC = \angle SKN = 30^\circ$$

$$\Rightarrow \angle SKB = 90^\circ + \angle MKA$$

$$\angle SKA = 90^\circ + \angle NBK$$

Со змешивы следует,

что точка K - точка пересечения биссектрис.



Дата: 23.09.2019

Летописец: Була Анастасия

Перейдем непосредственно
к теореме:

$\triangle ABC$, - равност.

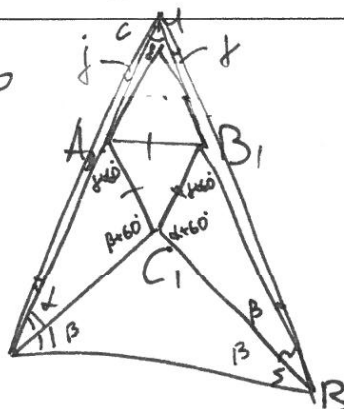
Построим от него $\triangle$ во
внешности, как на рис.

$$\alpha + \beta + \gamma = 60^\circ$$

$$\alpha = \frac{1}{3} A' (\text{изначального}) \quad A$$

$$\beta = \frac{1}{3} B' \left(\frac{1}{3} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{3} \right)$$

$$\gamma = \frac{1}{3} C' \left(\frac{1}{3} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{3} \right)$$



Проверим го пересечение - т.м.

$$\angle C_1AB = \alpha; \quad \angle C_1BA = \beta$$

$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$

Конечный результат
теоремы.

II Доказательство:

$$\alpha + \beta + \gamma = 60^\circ$$

$$\alpha^* = \alpha + 60^\circ$$

$$\beta^* = \beta + 60^\circ$$

$$\gamma^* = \gamma + 60^\circ$$

$$* = +60^\circ$$

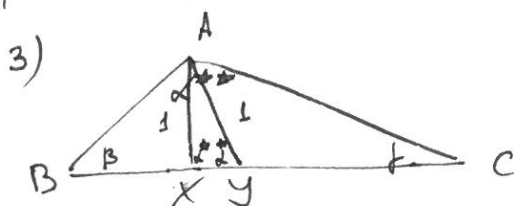
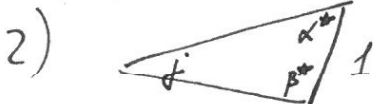
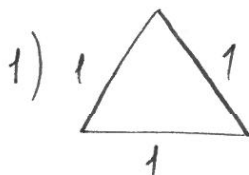
Рассмотрим $\triangle$ с углами:

$$1) (\alpha^*, \alpha^*, \alpha^*)$$

$$2) (\alpha^*, \beta^*, \gamma)$$

$$3) (\alpha^{**}, \beta, \gamma)$$

Как мы будем строить:

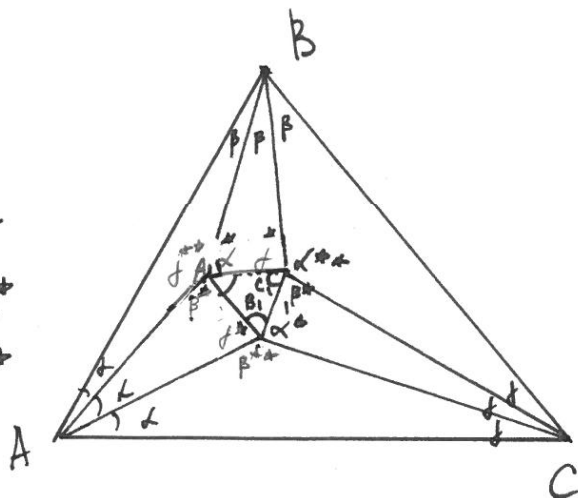


$$\angle AXY = \angle AYX = \alpha^*$$

Дата: 23.09.2019

Летописец: Бина Ано-сасил.

$$\begin{aligned} \angle B A_1 C &= \alpha^{**} \\ \angle C B_1 A &= \beta^{**} \\ \angle A C_1 B &= \gamma^{**} \\ \angle B A_1 C_1 &= \angle A B_1 C_1 = \gamma^* \\ \angle C A_1 B_1 &= \angle A C_1 B_1 = \beta^* \\ \angle C B_1 A_1 &= \angle B C_1 A_1 = \alpha^* \end{aligned}$$



Точки Маррея

I – т. О – центр Δ

II – т. М – точка пересечения
прямых

