



Mathematische Chronik

des

9. LGH - MATHE - SPRACH – AUSTAUSCHES

LANDESGYMNASIUM FÜR HOCHBEGABTE
Schwäbisch Gmünd, Deutschland

LYZEUM „NAUKOVA ZMINA“
Kiew, die Ukraine

"Mathematische Lösungsstrategien"

20. – 27.09.2018 - Aufenthalt der deutschen Gruppe in der Ukraine

Inversion am Kreis
Zentrische Streckung
Invarianten
Diskrete Kontinuität
Summieren der Reihen
Massenmittelpunkt
Wechsel des Bezugssystems

Математическая летопись

ДЕВЯТОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБМЕНА

ЛИЦЕЙ «НАУКОВА ЗМІНА»
Киев, Украина

ГИМНАЗИЯ ДЛЯ ОСОБО ОДАРЁННЫХ ДЕТЕЙ
Швебиш Гмюнд, Германия

"Нестандартные методы решения математических задач"

20. – 27.09.2018 – немецкая группа в Украине

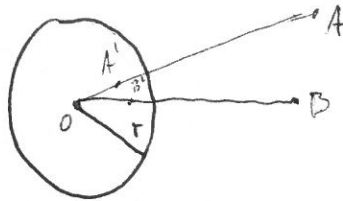
Datum: 21.09.18

Chronist: Roman Kotovitch

Mathematik - Unterricht.

Begin: 19:12

Inversion



$$\forall A \neq O \quad A \rightarrow A' : \overline{OA} \cdot \overline{OA'} = r^2$$

$$\overline{A'B'} = \overline{AB} \cdot \frac{\overline{OA} \cdot \overline{OB}}{r^2}$$

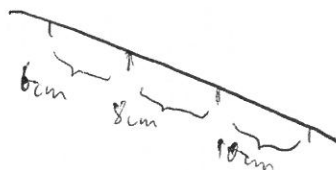
$$\overline{AB} \neq \overline{A'B'}$$

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} \neq \frac{\overline{A'B'}}{\overline{C'D'}}$$

$$\left. \begin{array}{l} \overline{AB} \neq \overline{A'B'} \\ \frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} \neq \frac{\overline{A'B'}}{\overline{C'D'}} \end{array} \right\} DV(AB, CD) = DV(A'B', C'D')$$

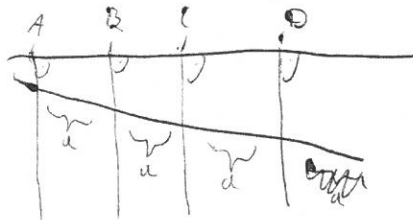
Doppelverhältnis

Aufgabe:

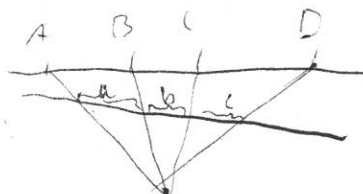


Ein Künstler zeichnet eine Straße mit 4 gleich weit von einander entfernten Laternen. Die Straße ist unter einem Winkel

Aus dem unendlichen:



Aus dem endlichen:



Datum: 21.09.18

Chronist: Roman Kofarov

Doppelverhältnisse

$$(AB; CD) = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} : \frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{AC} \cdot \overline{BD}}{\overline{BC} \cdot \overline{AD}}$$


$$\overline{AB} > 0$$

$$\overline{BA} < 0$$

Bemerkung: $D \rightarrow \infty$

$$(AB; CD) \xrightarrow{D \rightarrow \infty} \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$$

$$n! = 24$$

gegeben ist: $(AB; CD) = K$ gesucht: $(\dots; \dots) = K$

$$\text{Bsp.: } (BA; DC) = K$$

$$(CD; AB) = K$$

$$(DC; BA) = K$$

$$(BA; CD) = \frac{1}{K}$$

$$\overline{AD} = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD}$$

$$\overline{AD} \cdot \overline{BC} + \overline{AB} \cdot \overline{CD} = (\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD}) \cdot \overline{BC} + \overline{AB} \cdot \overline{CD}$$

$$= (\overline{AB} + \overline{BC}) \cdot \overline{BC} + \overline{CD} \cdot \overline{BC} + \overline{AB} \cdot \overline{CD} = (\overline{AB} + \overline{BC}) \cdot \overline{BC} + (\overline{AB} + \overline{BC}) \overline{CD}$$

$$= (\overline{AB} + \overline{BC}) (\overline{BC} + \overline{CD}) = \overline{AC} \cdot \overline{BD}$$

$$\overline{AD} \cdot \overline{BC} + \overline{AB} \cdot \overline{CD} = \overline{AC} \cdot \overline{BD} \quad | : \dots$$

$$(AD; BC) = 1 - \frac{1}{K}$$

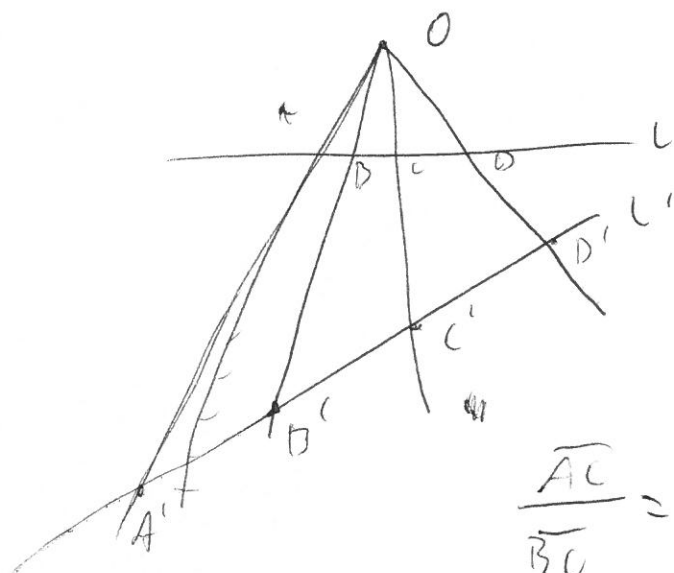
$$(AD; CB) = \frac{K}{K-1}$$

$$(AC; DB) = \frac{1}{K-1}$$

$$(AC; BD) = K-1$$

Datum: 21.09.18

Chronist: Roman Krotovitch



$$(AB; CD) = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} \cdot \frac{\overline{BD}}{\overline{AD}}$$

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{S_{\triangle AOC}}{S_{\triangle BOC}}$$

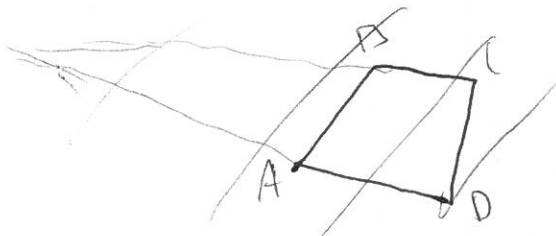
$$= \frac{\frac{1}{2} \overline{AO} \cdot \overline{OC} \cdot \sin(\angle aoe)}{\frac{1}{2} \overline{BO} \cdot \overline{OC} \cdot \sin(\angle boe)}$$

$$(AB; CD) \cdot \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} \cdot \frac{\overline{BD}}{\overline{AD}} = \frac{\frac{1}{2} \overline{AO} \cdot \overline{OC} \cdot \sin(\angle aoe) \cdot \frac{1}{2} \overline{OD} \cdot \overline{OD} \cdot \sin(\angle bod)}{\frac{1}{2} \overline{BO} \cdot \overline{OC} \cdot \sin(\angle boe) \cdot \frac{1}{2} \overline{OA} \cdot \overline{OD} \cdot \sin(\angle aod)}$$

$$= \frac{\sin(\angle ac) \cdot \sin(\angle bd)}{\sin(\angle bc) \cdot \sin(\angle ad)}$$

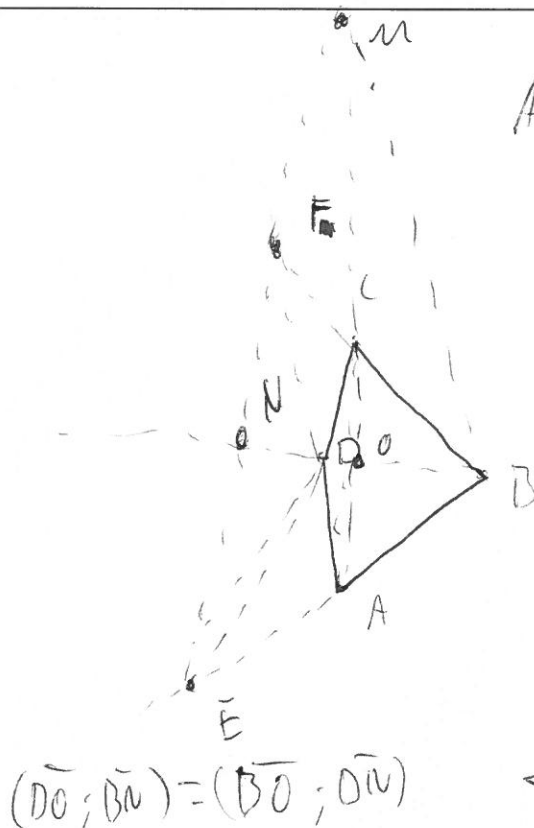
$$(AB; CD) = \frac{\overline{AC} \cdot \overline{BD}}{\overline{BC} \cdot \overline{AD}} = \frac{2L \cdot 2L}{L \cdot 3L} = \frac{4}{3}$$

A B C D
+ + + +



Datum: 20.09.18

Chronist: Roman Kopylov



Aufgabe: berechne:

$$\begin{aligned} &(\overline{EN}; \overline{FM}) \\ &(\overline{AO}; \overline{CM}) \\ &(\overline{BO}; \overline{DN}) \end{aligned}$$

B als Perspektive:

$$(\overline{EN}; \overline{FM}) = (\overline{AO}; \overline{CM})$$

A als Perspektive:

$$(\overline{BO}; \overline{DN}) = (\overline{EM}; \overline{FN})$$

C als Perspektive:

$$(\overline{EM}; \overline{FN}) = (\overline{DO}; \overline{BN})$$



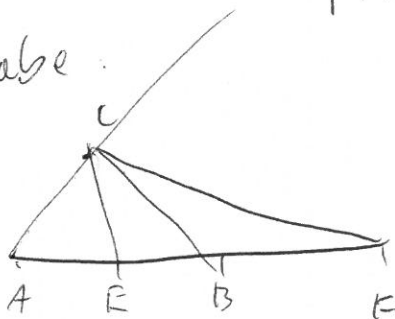
$$(\overline{AB}; \overline{CD}) = k = (\overline{AD}; \overline{CB}) = \frac{k}{k-1}$$

$$\rightarrow k = \frac{k}{k-1}$$

$$\rightarrow k = 2$$

$$(\overline{EF}; \overline{NM}) = \frac{\overline{EN}}{\overline{FN}} \bigg| \frac{\overline{EM}}{\overline{FM}} = -1$$

Haus-
Aufgabe:



$$(\overline{AB}; \overline{EF}) = ?$$

Datum: 22.09.2018

Chronist: Kirill Lukesch

M-Unterricht

Invariante

Aufgabe N°1: Auf einem Tisch stehen 7 Gläser verkehrt rum. In einem Schritt darf man 2 Gläser umdrehen.

Kann man alle Gläser umdrehen?

Antwort: David D. meinte, dass es geht und zeigte seine Idee mit Plastik bechern; fand aber heraus, dass er falsch lag.

Minus heißt, dass das Glas verkehrt steht;

$$\begin{array}{l} \text{I} \quad -- \rightarrow ++ \\ \text{II} \quad ++ \rightarrow -- \\ \text{III} \quad +- \rightarrow -+ \end{array} \quad \left. \begin{array}{c} (-2) \\ (+2) \\ (0) \end{array} \right\} \text{Änderungen der Minus Plus vice versa}$$

Somit ist es unmöglich die Aufgabe zu lösen.

Aufgabe N°2:

1 2 3 4 ... 2017, 2018

$$a, b \rightarrow |a-b|$$

Kann es sein, dass am Ende nur noch solch eine Folge sich ergibt: 0, 0, 0, ..., 0?

Bsp.:
$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & \\ 0 & & \end{array}$$

Antwort: Wir betrachten die Summe aller Zahlen; sie ist ungerade

$$S = 2k+1$$

$$\begin{array}{cc} a+b & a-b \\ & -2b \end{array}$$

$$S_1 = S_0 - (a+b) + (a-b) = S_0 - 2b$$

Somit bleibt die Parität erhalten

Somit wird die Summe immer ungerade sein

Datum: 22.09.2018

Chronist: Kirill Lukesch

Aufgabe N^o 3: Es gibt 3 Arten v. Amöben auf einem anderen Planeten.
 Wenn 2 Amöben von 2 Arten sich verschmelzen, kommt eine Amöbe der 3. Art heraus.
 Nach 1h gibt es nur noch 1 Amöbe. Welcher Art?

a)

	A	B	C
Anfang	20	21	22
Ende		1	

Wenn 2 Amöben ^{sich} verschließen, ändert sich die Parität.
 Wenn eine Amöbe übrig bleibt, müssen es 2 Amöbentypen geben, die ungerade sind & eine die gerade ist $\Rightarrow A, C = 0$
 $B = 1$

b)

	A	B	C
Anfang	20	24	22
Ende	0	2	0

Es ist unmöglich eine Amöbe zu erhalten nach der Logik der vorherigen Aufgabe.

2. Beweismethode:

1. Schritt: $A-1$ $B-1$ $C+1$

2. Schritt: $(A-1)+1$ $(B-1)+1$ $(C+1)-1$

3. Schritt: $(A-1)+1+1$ $(B-1)-1$ $((C+1)-1)-1$

	A	B	C
	20	24	22
1.			
2.	-	-	-
3.	21	21	21
1.			
2.	20	20	20
3.			

1 1 1
0 0 2

Datum: 22.09.18

Chronist: Kirill Lukesch

Aufgabe № 1: Es gibt 3 Automaten

1. Automat: $(a, b) \rightarrow (a+1, b+1) [+ (a, b)]$
2. Automat: $(2k, 2n) \rightarrow (k, n) [+ (2k, 2n)]$
3. Automat: $(a, b) \wedge (b, c) \rightarrow (a, c) [+ (a, b) + (b, c)]$

Es werden aber die eingegeben Karten auch ausgespielt.

Bsp.: $(5, 19) \rightarrow \dots \rightarrow (1, 2018)$
 Anfang Wie?

David k.'s Lösung: ^{Ja} $(5, 19) \rightarrow \dots \rightarrow (8, 22)$
 $(8, 22) \rightarrow (4, 11)$
 Nicht richtig / komplett.

Ivan's Lösung:

 $(5, 19) \rightarrow \dots \rightarrow (2004, 2018)$ $(2, 20) \rightarrow (3, 19)$

Nicht r. / kompl.

Antw.: Differenz beim 1. Automaten bleibt ^{Diff.} Anfang ^{diff.} $(5, 19) =$
 2. — 11 — — — 11 — _{durch 7 teilbar. = 14}
 3. — 11 — — — 11 —

 $(1, 2018)$

7x2017

Deshalbmögl.

Datum: 22.09.18

Chronist: Kirill Lukesch

Aufgabe N° 5: Es gibt einen Haufen mit 1001 Steinen
 1 Schritt: Man darf einen Stein wegwerfen und
 den Haufen in ~~zwei~~ beliebig

Kann man den Haufen so teilen, dass in allen übrigen Haufen genau
 3 übrig bleiben?

1. Lösung: $3x + 1(x-1) = 1001$ x – Anzahl d. Haufen am Ende
 $\underbrace{\hspace{1cm}}$ wie viele Steine wir rausschmeißen

$$\Leftrightarrow 4x = 1002$$

$$x \nmid 1002 \Rightarrow \text{Unmöglich, da } x \in \mathbb{N}$$

2.L.: Bei jedem Schritt 1 Stein weniger 1 Haufen mehr

$$\begin{array}{cc} x & y \\ -1 & +1 \end{array} \quad \text{Invariante } x+y$$

$$\text{Am Anfang } x+y = 1002$$

Am Ende gibt es dreimal so viele Steine wie Haufen

$$(\text{f. Bedingung}): 3t+t=1002 \quad t \notin \mathbb{N} \Rightarrow \text{unmögl.}$$

Mathem. Halbwitze:

$$1+2+3+\dots = -\frac{1}{12}$$

$$\text{Scheinbeweis: 1. Schritt: } S_1 = 1-1+1-1+1-1+\dots =$$

$$= 1-(1-1+1-\dots) = 1-S_1$$

$$1-S_1 = S_1 \Leftrightarrow S_1 = \frac{1}{2}$$

Datum: 22.09.18

Chronist: Kirill Lukesch

$$2. S_2 = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - \dots$$

$$S_2 + S_2 = \begin{matrix} 1 + 2 + 3 + \dots \\ 1 - 2 + \dots \end{matrix} \quad] +$$

$$2S_2 = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots = \frac{1}{2}$$

$$S_2 = \frac{1}{4}$$

$$3. S - S_2 = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots - (1 - 2 + 3 - \dots) =$$

$$= 4 + 8 + 12 + 16 + \dots = 4(1 + 2 + 3 + \dots) = 4S$$

$$S - S_2 = 4S$$

$$3S = -S_2$$

$$S = -\frac{S_2}{3} = -\frac{1}{12}$$

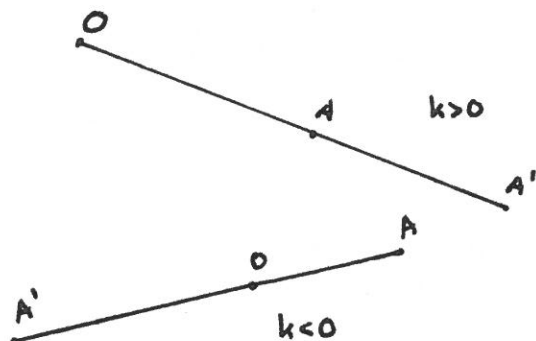
Hausaufgabe: Es gibt 3 Zahlen

1 Schritt: $\left\{ \frac{a+b}{\sqrt{2}}, \frac{a-b}{\sqrt{2}} \right\}$ Möglich: $(2; \sqrt{2}; \frac{1}{\sqrt{2}}) \rightarrow \dots \rightarrow (1; \sqrt{2}; 1 + \sqrt{2})?$

Datum: 24.09.2018

Chronist: Chiara F. Ghiglione

Zentrische Streckung



Streckzentrum O

Streckfaktor k ($k > 0$); ($k < 0$)

$$Z_{O,k}(A) = A'$$

$$1) A' \in OA$$

$$2) \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = |k|$$

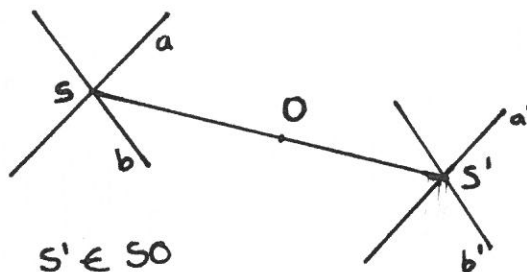
Eigenschaften:

I Winkeltreu

II $Z_{O,k}(a) = a' \Rightarrow a \parallel a'$

III $a \cap b = S$

$$Z_{O,k}(a) \cap Z_{O,k}(b) = Z_{O,k}(S)$$

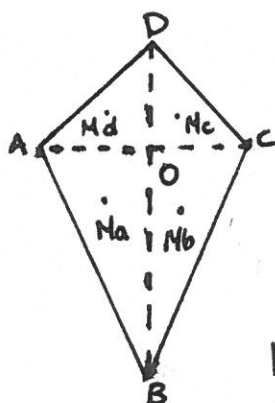


$$S' \in SO$$

$$\frac{\overline{OS'}}{\overline{OS}} = |k|$$

Aufgaben

1(19.1)



• ABCD ist ein konvexes Viereck

• M_a, M_b, M_c, M_d sind die Schwerpunkte

$\Rightarrow$ Beweise, dass $M_a M_b M_c M_d$ ein Parallelogramm ist!

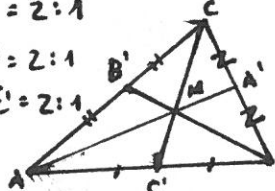
Was ist ein Schwerpunkt?

$$\overline{MA} : \overline{MA'} = 2:1 \quad [A:A', B:B', C:C' = Z_{M, -\frac{1}{2}}]$$

$$\overline{MB} : \overline{MB'} = 2:1$$

$$\overline{MC} : \overline{MC'} = 2:1$$

$$\overline{M_a M_b} = \frac{1}{3} \overline{AC}$$



$$Z_{M, -\frac{1}{2}}(C) = C'$$

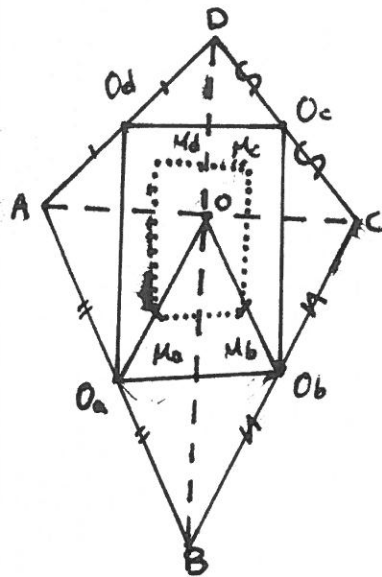
$$Z_{M, -\frac{1}{2}}(A) = A'$$

$$Z_{C, \frac{3}{2}}(M) = C'$$

$$Z_{C, \frac{2}{3}}(C') = M$$

Datum: 24.09.2018

Chronist: Chiara F. Ghiglione



$$\mathbb{Z}_{0, \frac{2}{3}}(Oa) = Ma \quad \mathbb{Z}_{0, \frac{2}{3}}(Ob) = Mb$$

$$\mathbb{Z}_{0, \frac{2}{3}}(Oa Ob) = Ma Mb$$

$$\overline{Ma Mb} = \frac{2}{3} \overline{Oa Ob}$$

$$Ma Mb Mc Md = \mathbb{Z}_{0, \frac{2}{3}}(Oa Ob Oc Od)$$

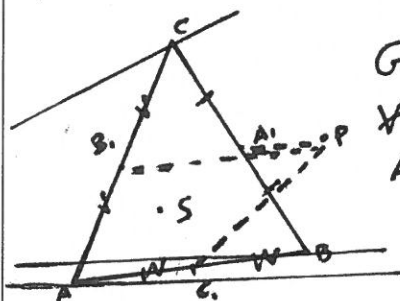
Behannt ist, dass $Oa Ob Oc Od$ ein Parallelogramm ist

$$\circ Ma Mb Mc Md \parallel Oa Ob Oc Od$$

$\Rightarrow$ Somit ist $Ma Mb Mc Md$ ein Parallelogramm

$$\overline{Ma Mb} = \frac{1}{3} \overline{AC}$$

2. (19.4)



Geg: $\triangle ABC$; A_1, B_1, C_1 , Mittelpunkt der Seiten

$\times P$ außerhalb von $\triangle ABC$

$A \in l_a$; $l_a \parallel PA_1$ (Analog l_b, l_c)

Bew: (I) $l_a \cap l_b \cap l_c = Q$

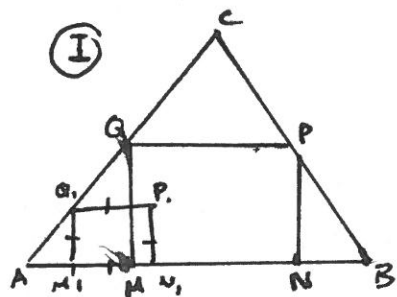
$$\begin{aligned} \mathbb{Z}_{S, -2} A_1 &\rightarrow A \\ \textcircled{I} \quad A, P &\rightarrow l_a \\ B, P &\rightarrow l_b \\ C, P &\rightarrow l_c \end{aligned}$$

$$\Rightarrow P \rightarrow l_a \cap l_b \cap l_c$$

$$Q = \mathbb{Z}_{S, -2}(P)_{//}$$

Datum: 24.04.2018

Chronist: Chiara F. Ghiglione

Konstruktionsaufgaben

$$\triangle ABC_1 \sim \triangle ABC$$

$$K = \frac{CB_1}{CB} = \frac{AC_1}{AC} = \frac{AB_1}{AB}$$

1. $\forall Q \in AC$
2. Lot $QM \perp AB$, $M \in AB$
3. $\overline{M_1N_1} = \overline{Q_1M_1}$, $N_1 \in AB$
4. $Q_1M_1N_1P_1$ ist ein Quadrat
5. $C_1B_1 \parallel CB$, $P_1 \in C_1B_1$, $C_1 \in AC$, $B_1 \in AB$

Werkzeuge:

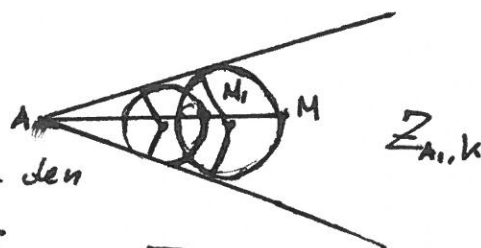
1. Zirkel
2. Lineal ohne Maßeinheiten
3. Bleistift

Grundkonstruktionen:

1. Lot durch geg. Punkt
2. Mittelsenkrechte
3. Winkelhalbierende
4. Parallele Gerade

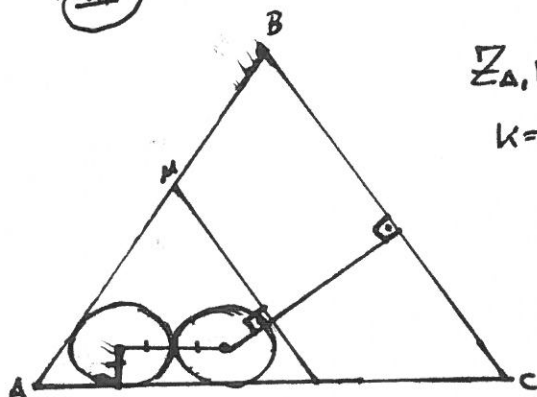
Geg: $\angle A$

Minnerhalb des Winkels

Ges: einen in den Winkel
einbeschriebenen Kreis der durch den
Punkt M geht

$$h_1 = \frac{\overline{MA}}{\overline{M_1A}} \quad h_2 = \frac{\overline{MA}}{\overline{M_2A}}$$

III



$$\Sigma_{A,K}$$

$$K = \frac{\overline{AB}}{\overline{AM}}$$

Datum: 25. 09. 2018

Chronist: Maksim Meherb

SERIES

$$S_R = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

$$S_J = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

$$S = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots = -\frac{1}{12} ?$$

Notation

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{12} = \sum_{k=1}^{12} a_k$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{27} = \sum_{k=1}^{27} \frac{1}{k}$$

Telescope sums

THEOREM i) $\sum_{k=1}^n (a_k - a_{k+1}) = a_1 - a_{n+1}$

$$= (a_1 - \cancel{a_2}) + (\cancel{a_2} - \cancel{a_3}) + (\cancel{a_3} - a_4) + \dots$$

ii) $\sum_{k=1}^n (a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_1$

ex $\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \frac{1}{1} - \frac{1}{n+1}$

$$= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$$

Partial fraction expansion

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$$

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1 + (k-k)}{k(k+1)} = \frac{(k+1) - k}{k(k+1)} = \frac{\cancel{k+1}}{k(\cancel{k+1})} - \frac{k}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

Datum: 25.09.2018

Chronist: Maksim Mhinert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 - \frac{1}{n+1} = 1$$

converges

THEOREM

$$\sum a_n \text{ conv.} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

$$\lim a_n \neq 0 \Rightarrow \sum a_n \text{ doesn't converge}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \quad \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right)$$

$$\left[\frac{1}{3} \geq \frac{1}{4}, \frac{1}{5} > \frac{1}{6} > \frac{1}{7} > \frac{1}{8} \right] \geq 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right)$$

$$= 1 + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \dots}_n = 1 + \frac{n}{2}$$

THEOREM

$$i) \sum a_n, \sum b_n \text{ conv} \Rightarrow \sum (a_n \pm b_n) = \sum a_n \pm \sum b_n$$

$$ii) \sum a_n \cdot \lambda$$

Ratio test

$$\exists q < 1 \quad \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq q < 1 \Rightarrow a_n \text{ conv for almost all } n$$

$$\sum_{k=0}^n q^k = 1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^n \quad | \cdot q$$

$$q \sum_{k=0}^n q^k = q + q^2 + q^3 + \dots + q^{n+1}$$

$$\sum_{k=0}^n q^k - q \sum_{k=0}^n q^k = (1 + q + q^2 + \dots + q^n) - (q + q^2 + q^3 + \dots + q^{n+1})$$

$$= 1 - q^{n+1}$$

Datum: 25. 09. 2018

Chronist: Maksim Meinert

$$(1-q) \sum_{k=0}^n q^k = 1 - q^{n+1} \quad \left| \cdot \frac{1}{1-q} \right. \quad q \neq 1$$

$$\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n q^k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \frac{1 - \lim_{n \rightarrow \infty} q^{n+1}}{1 - q}$$

ex:

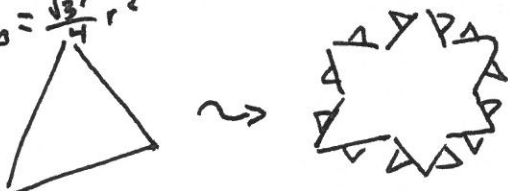
$$a) \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{2}{3}\right)^k = \frac{1}{1 - (-\frac{2}{3})} = \frac{1}{1 - (-\frac{2}{3})} = \frac{3}{5}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \dots$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \text{const}$$

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots = \ln 2 \approx 700 \text{ m}$$

$$A_0 = \frac{\sqrt{3}}{4} r^2$$



circumference ?
area ?

 $k_0 : \text{---}$
 $k_1 : \text{---}$
 $k_2 : \text{---}$

...

lines : $\frac{1}{3} \sim \frac{1^2}{3^4} \quad 3 \cdot 4^n$ length $r \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n$
side length $\frac{1}{3}$ of previous Δ of new Δ

$$L_n = 3 \cdot 4^n \cdot r \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$U_{\star} = \sum_{n=0}^{\infty} 3 \cdot 4^n \cdot r \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n = 3r \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{4}{3}\right)^n \rightarrow \infty$$

Datum: 25.09.2018

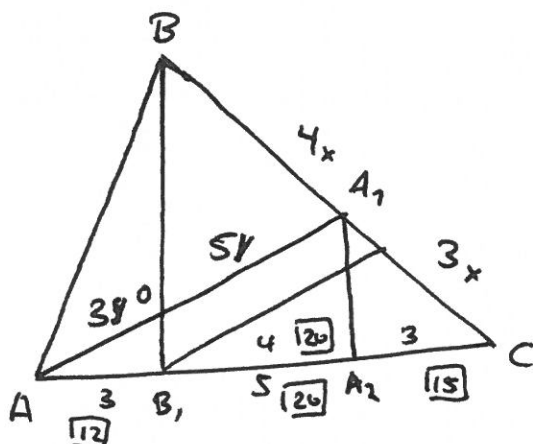
Chronist: Maksim Meiner

Area $k_n \rightarrow k_{n+1}$ add $3 \cdot 4^n \Delta$

$$\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{2(n+1)} r^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} r^2 \left(\frac{1}{9}\right)^{n+1}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot r^2 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{9}\right)^{n+1} \quad \leftarrow \text{(converge)}$$

Verschiedene Methoden zur Problemlösung



$$\frac{\overline{BA_1}}{\overline{A_1C}} = \frac{4}{3}$$

$$\frac{\overline{AO}}{\overline{OA_1}} = \frac{3}{5}$$

$$\frac{\overline{AB_1}}{\overline{B_1C}} = ?$$

$$\frac{\overline{BO}}{\overline{OB_1}} = ?$$

I. Strahlensatz: $A_1A_2 \parallel BB_1$

$$\frac{\overline{B_1A_2}}{\overline{A_2C}} = \frac{\overline{BA_1}}{\overline{A_1C}} = \frac{4}{3}$$

$$\frac{\overline{AB_1}}{\overline{B_1A_2}} = \frac{\overline{AO}}{\overline{OA_1}} = \frac{3}{5}$$

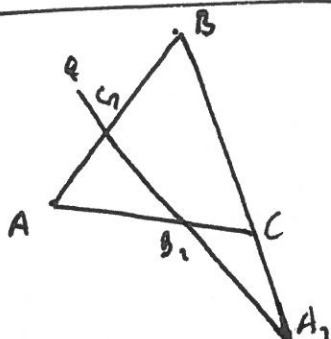
$$\frac{\overline{B_1A_2}}{\overline{A_2C}} = \frac{4}{3} = \frac{8}{6} = \frac{12}{9} = \dots = \frac{20}{15}$$

$$\frac{\overline{AB_1}}{\overline{B_1A_2}} = \frac{3}{5} = \frac{6}{10} = \frac{9}{15} = \dots = \frac{12}{20}$$

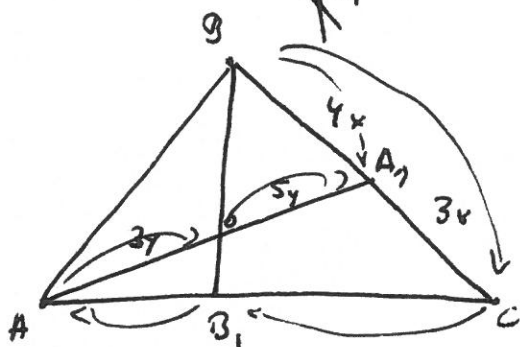
$$\Rightarrow \frac{\overline{AB_1}}{\overline{B_1C}} = \frac{12}{35}$$

Datum: 25.09.2018

Chronist: Maksim Meiner

II Satz von Menelaus

$$\frac{\overrightarrow{AC_1}}{\overrightarrow{C_1B}} \cdot \frac{\overrightarrow{BA_1}}{\overrightarrow{A_1C}} \cdot \frac{\overrightarrow{CB_1}}{\overrightarrow{B_1A}} = -1$$

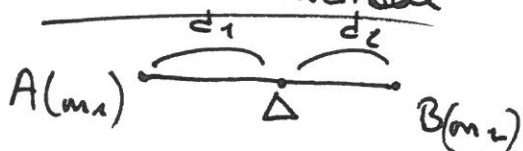


(AA1C ; BB1) :

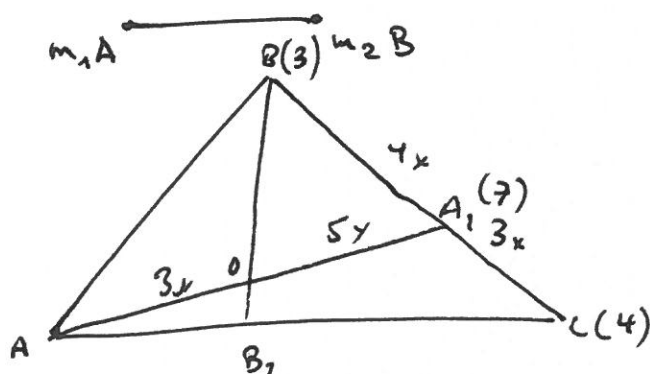
$$\frac{\overline{AO}}{\overline{OA_1}} \cdot \frac{\overline{A_1B}}{\overline{BC}} \cdot \frac{\overline{CB_1}}{\overline{B_1A}} = 1$$

$$\frac{3}{5} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{\overline{CB_1}}{\overline{B_1A}} = 1$$

$$\frac{\overline{CB_1}}{\overline{B_1A}} = \frac{35}{12}$$

III Massenmethode

$$m_1 d_1 = m_2 d_2$$



$$m \cdot 3 = 5 \cdot 7$$

$$m = \frac{35}{3}$$

$$a \cdot m = b \cdot 4$$

$$\frac{a}{b} = \frac{4}{m}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{4}{\frac{35}{3}} = \frac{12}{35}$$