



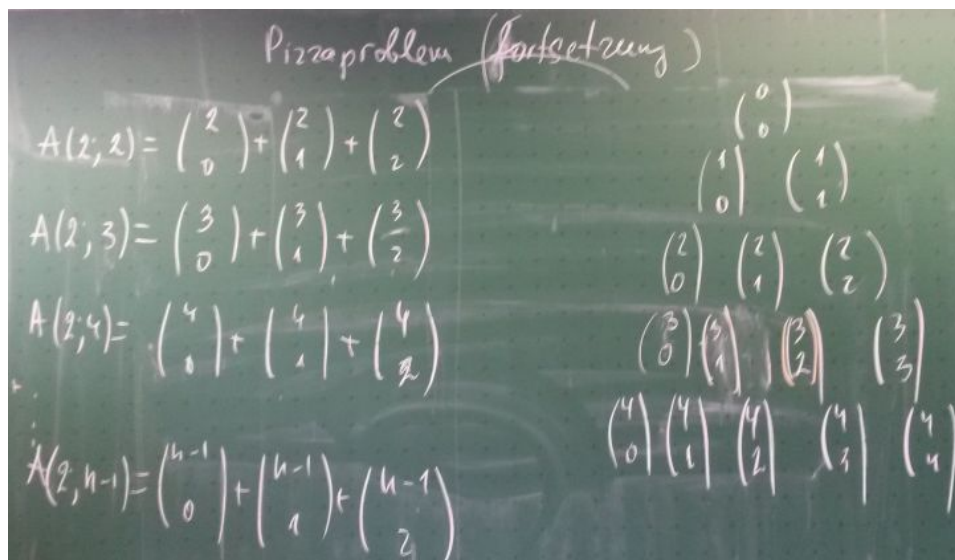
Математическая летопись восьмого математического обмена

ЛИЦЕЙ «НАУКОВА ЗМІНА»
(Киев, Украина)

ГИМНАЗИЯ ДЛЯ ОСОБО ОДАРЁННЫХ ДЕТЕЙ
(Швебиш Гмюнд, Германия)

"Комбинаторика" и алгебраические поверхности в программе "SURFER"

22.06. - 04.07.2017 – украинская группа в Германии



Mathematische Chronik

des

8. LGH - MATHE - SPRACH – AUSTAUSCHES

zwischen dem Lyceum „Naukova Zmina“ (Kiew, die Ukraine)

und

dem Landesgymnasium für Hochbegabte (Schwäbisch Gmünd, Deutschland)

"Kombinatorik" und algebraische Flächen mit dem Programm "SURFER"

22.06. - 04.07.2017 - Aufenthalt der ukrainischen Gruppe in Deutschland

Дата: 22.06.2017

Летописец: Третьякова Катя

Комбинаторика

Комбинаторика - часть мат-ки, которая занимается подсчётом числа вариантов (возможностей)

$n!$ - n факториал $0! = 1$ $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$

Перестановка - это определённый порядок элементов в множестве

Кол-во перестановок для $M = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\} = P_n = n!$

(элементы в множестве различны)

Рассмотрим $M^* = \{a_1 = a_2 = \dots = a_{k_1} = a; b_1 = b_2 = \dots = b_{k_2} = b; \dots; z_1 = z_2 = \dots = z_{k_e} = z\}$

в разных элементах, всего их n

Кол-во перестановок для $M^* = \overline{P}_n = P_n(k_1, k_2, k_3, \dots, k_e) = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_e!}$

Вариация/Размещение - выбор k элементов из $M = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ при

важности порядка (наборы 123 и 321 - разные)

$$V_n^k \text{ (Deutsch)} = A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

* Если элемент можно выбрать несколько раз, то

$$\overline{V}_n^k = \overline{A}_n^k = n^k$$

Сочетание - выбор k элементов из $M = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$ при

неважности порядка (наборы 123 и 321 - одинаковые)

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k! (n-k)!} = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{A_n^k}{P_k}$$

* Если элемент можно выбрать несколько раз, то

$$\overline{C}_n^k = C_{n+k-1}^k = \binom{n+k-1}{k}$$

Задачи

①  В клетку ставится число $\{0, 1, \dots, 9\}$

Сколько комбинаций существует?

Ответ: $\overline{V}_{10}^5 = \overline{A}_{10}^5 = 10^5$

② В кажд. клетку ставится последняя цифра суммы первых 5-ти.
Сколько вариантов расстановки?

Ответ: $\overline{V}_{10}^5 = \overline{A}_{10}^5 = 10^5$

Дата: 23.06.2017

Летописец: Третьякова Катя

Бином Ньютона. Биномиальные ко

$$(a+b)^n = \underbrace{C_n^0 a^n}_{T_1} + \underbrace{C_n^1 a^{n-1} b}_{T_2} + \underbrace{C_n^2 a^{n-2} b^2}_{(C_n^k a^{n-k} b^k)} + \dots + \underbrace{C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n}_{T_{n+1}}, n \in \mathbb{N}$$

Док-во.

$$(a+b)^n = \underbrace{(a+b)(a+b) \dots (a+b)}_n$$

Чтобы получить a^k нам нужно выбрать k скобок $(a+b)$. Тогда кол-во слагаемых с $a^k = C_n^k = C_n^{n-k}$

$$T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k, k \in \{0, 1, \dots, n\}$$

$$(b+a)^n = \underbrace{C_n^0 b^n}_{T'_1} + \underbrace{C_n^1 b^{n-1} a}_{T'_2} + \dots + \underbrace{C_n^n a^n}_{T'_{n+1}}, n \in \mathbb{N}$$

$$T_k = T'_{n-k+1}$$

Триangular Паскаля

$$\begin{array}{rcl} 1 & 1 & -(a+b)^1 - 1 \\ 1 & 2 & 1 & -(a+b)^2 - 2 \\ 1 & 3 & 3 & 1 & -(a+b)^3 - 3 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & -(a+b)^4 - 4 \end{array}$$

$$C_n^0 C_n^1 C_n^2 \dots C_n^{n-1} C_n^n = (a+b)^n - n$$

$$C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} = \frac{(n-1)! \cdot (k+n-k)}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$\underbrace{C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k}_n$$

$$\underbrace{\begin{array}{c} \text{внутри} \\ \square \\ C_{n-1}^{k-1} \end{array} + \begin{array}{c} \text{снаружи} \\ \square \\ C_{n-1}^k \end{array}}_{C_n^k}$$

$$(a-b)^n = (a+(-b))^n = C_n^0 a^n - C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots + (-1)^k C_n^k a^{n-k} b^k + \dots + (-1)^{n-1} C_n^{n-1} a b^{n-1} + (-1)^n C_n^n b^n, n \in \mathbb{N}$$

Задачи

① $(\sqrt{5} + \sqrt[3]{3})^{100}$ Сколько слагаемых $\in \mathbb{R}$?
 Ответ: 17 (где $(\sqrt{5} + \sqrt[3]{3})^n = \lfloor \frac{n}{6} \rfloor + 1$)

Дата: 23.06.2017 - 24.06.2017

Летописец: Тирешёва Катя

ЗадачаНабор зубов (всего их 32) $\vee$ кол-во людей (≈ 7 млн)Ошибки: наборов зубов $2^{32} \ll 7\,000\,000\,000$
(4294967296)

Строка	Пascal	Σ	
0	1	1	2^0
1	1 1	2	2^1
2	1 2 1	4	2^2
3	1 3 3 1	8	2^3
4	1 4 6 4 1	16	2^4
5	1 5 10 10 5 1	32	2^5
n	$C_n^0 C_n^1 \dots C_n^{n-1} C_n^n$	2^n	$2^n - \text{сумма всех кол-во подмножеств } M = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$

Задача

$$\text{Док-ть } \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} C_n^{2i} = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} C_n^{2i+1}$$

Док-во:

$$(a+b)^n = (1-1)^n = (1+(-1))^n = C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \dots + (-1)^n C_n^n = 0$$

$$C_n^0 + C_n^2 + \dots = C_n^1 + C_n^3 + \dots$$

2 4 0 6 2 0 1 7

Док-ть, что обведённое число = сумма обведённых и заштрихованных чисел

$$\begin{array}{ccccccc} & & 1 & & 1 & & \\ & 1 & & 2 & & 1 & \\ & 1 & 3 & & 3 & 1 & \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & & \\ 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & \end{array}$$

Док-во

$$C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k = C_{n-1}^{k-1} + (C_{n-2}^{k-1} + C_{n-2}^k) = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-2}^{k-1} + C_{n-2}^k = \dots = \sum_{i=1}^{n-k+1} C_{n-i}^{k-1}$$

Задача $11^n = ?$ (без калькулятора)

$$11^n = (10+1)^n = 10^n + C_n^1 10^{n-1} + C_n^2 10^{n-2} + C_n^3 10^{n-3} + \dots + C_n^{n-1} 10 + 1$$

ЗадачаСколько нулей в конце в $1001^{1000} - 1$?

$$(1000+1)^{1000} - 1 = C_{1000}^0 1000^{1000} + C_{1000}^1 1000^{999} + \dots + C_{1000}^{999} 1000 + C_{1000}^{1000} - 1$$

$$C_{1000}^{998} \cdot 1000^2 = 499500000000$$

Переходя разряда не будет, потому что кол-во нулей будет на 3

Ответ: 6

Дата: 24.06.2017

Летописец: Шренбекова Кэти

- Док-тв пер-во Бернулли: $(1+x)^n \geq 1+nx$, $x \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$

$$(1+x)^n = \underbrace{1 + \binom{n}{1}x}_{1+nx} + \binom{n}{2}x^2 + \dots + \binom{n}{n-1}x^{n-1} + x^n \geq 1+nx$$
- Док-тв $(1+x)^n + (1-x)^n \geq 2$, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$

$$(1+x)^n + (1-x)^n = 2 + 2 \sum_{\substack{i=0 \\ \geq 0}}^{n-2i} \binom{n-2i}{n} x^{2i} \geq 2$$
- $(a+b+c)^4$ - ?

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+bc+ac)$$

$$(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b) + 6abc$$

$$(a+b+c)^4 = a^4 + b^4 + c^4 + 4(a^3b + a^3c + b^3a + b^3c + c^3a + c^3b) + 6(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) + 12abc(a+b+c)$$



Дата: 24.06.2017

Летописец: Шремелькова Кайя

Pizzaproblem

- Задача: разрезать пиццу (плоскость) прямыми на макс кол-во кусков:
- разрезы не совпадают
 - прямые не параллельные (разрезы)
 - никакие 3 прямые не проходят через 1 точку

 $A(n)$ - кол-во кусков при n разрезов

$$A(0) = 1$$

$$A(n) = A(n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2} + 1 = \frac{n^2 + n + 2}{2}$$

$$\begin{aligned} A(n) &= A(n-1) + n = A(n-2) + (n-1) + n = A(n-3) + \cancel{A(n-2)} + (n-2) + (n-1) + n = \\ &= A(0) + 1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) + n = 1 + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2 + n + 2}{2} = \\ &= 1 + n + \frac{n(n-1)}{2} = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 = A(2; n) \end{aligned}$$

- В ~~2~~ одномерном пространстве $n+1 = C_n^0 + C_n^1 = A(1; n)$

- В трёхмерном пространстве $A(3; n) = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 = \frac{n^3 + 5n + 6}{6}$

Условие: никакие 3 не проходят через 1 ~~прямую~~
не совпадают
не параллельны

Док-во

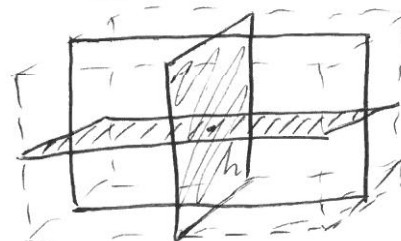
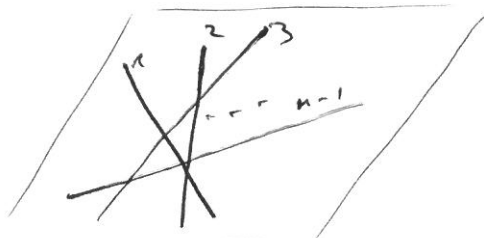
 n -ная плоскость

рис. 1 пример для 3

Она пересекает каждую плоскость $(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{n-1})$ и не n -ой плоскостью, и 1 прямое пересечение, и этих прямых $A(2; n-1)$. Каждая область n -ой плоскости делит часть пространства на 2

$$\begin{aligned} A(3; n) &= A(3; n-1) + A(2; n-1) = A(3; n-1) + \frac{n^2 - n + 2}{2} = \\ &= A(3; 0) + A(2; 0) + A(2; 1) + A(2; 2) + \dots + A(2; n-1) \end{aligned}$$

Дата: 25.06.2017 - 26.06.2017 Летописец: Шрешьякова КатяPizza Problem #2

Дан n -угольник (выпуклый) и каждая точка соединена с каждой ~~и~~ Он так построен, что никакие 3 не проходят через 1 точку.

Всего краевых $\frac{n(n-1)}{2} = C_n^2$

Всего точек пересечения:

$C_n^4 + n$ (внутренние + точки-вершины).

Пусть n_3 - кол-во Δ

n_4 - кол-во $\square$

n_5 - кол-во $\diamond$

n_m - кол-во n -угольников, которые получились при пересечении диагоналей/сторон.

$$A(n) = n_3 + n_4 + n_5 + n_6 + \dots + n_m$$

$$A(4) = 4$$

$$A(5) = 11$$

$$A(6) = 25$$

$$A(7) = 50$$

Метод двойного подсчёта

$$\textcircled{1} 3n_3 + 4n_4 + 5n_5 + \dots + mn_m = \left[4A(n_3 + n_4 + n_5 + \dots + n_m) + (n-2)n \right] = \begin{array}{l} \text{кол-во точек} \\ \text{(каждая точка является} \\ \text{4х многоугольников)} \\ \text{+ (n-2)n (3 вершины} \\ \text{каждой (n-2)} \\ \text{многоугольника)} \end{array} \text{ вершиной}$$

$$3n_3 + 4n_4 + 5n_5 + \dots = 4 \binom{n}{4} + n(n-2) \quad (1)$$

$$\textcircled{2} \sum \text{углов} = 180^\circ(n-2) + 360^\circ \binom{n}{4} = 180^\circ n_3 + 360^\circ n_4 + \dots$$

(при вершинах + внутр. углы при пересечении диагоналей)

$$n-2 + 2C_n^4 = n_3 + 2n_4 + 3n_5 + \dots \quad (2)$$

$$(1)-(2): 2(n_3 + n_4 + n_5 + \dots) = 2C_n^4 + (n-2)(n-1)$$

$$n_3 + n_4 + \dots = C_n^4 + \frac{(n-1)(n-2)}{2} = C_n^4 + C_{n-1}^2 = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24} + \frac{(n-1)(n-2)}{2} = \frac{(n-1)(n-2)(n^2-3n+12)}{24}$$

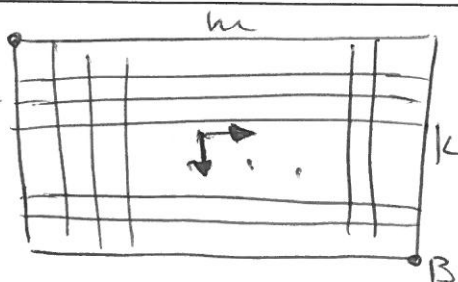
Дата: 26.06.2017

Летописец: Тирешкова Ксения

~~Кол-во~~
Сколько минимальных путей есть?

Каждый путь $(m+k)$ отрезков

Кол-во путей C_{m+k}^k



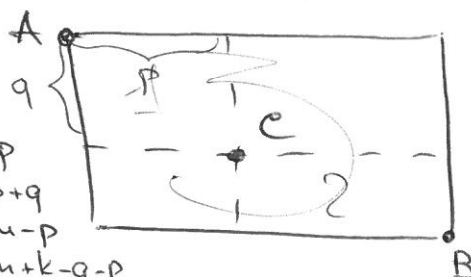
Нужно поставить направление $\rightarrow$ в m мест, всё остальное будет k .

Задача

+ Нужно пройти через π - C

Кол-во маршрутов из A в C (1) $= C_{r+q}^r$

из C в B (2) $= C_{m+k-q-r}^{m-r}$



$$\text{из } A \text{ в } B \text{ (3)} = C_{r+q}^r \cdot C_{m+k-q-r}^{m-r}$$

Свойство

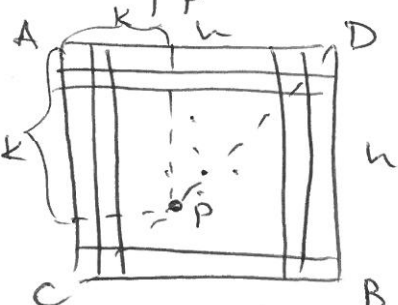
$$(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + (C_n^2)^2 + \dots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n$$

Кол-во путей из A в B $= C_{2n}^n$

Каждый маршрут проходит ровно через 1 точку на диагонали CD

$(C_n^k)^2 =$ кол-во путей из A в B через π . $P(k; n-k) = (C_n^k \cdot C_n^{n-k})$

В сумме это все маршруты, что у нас есть

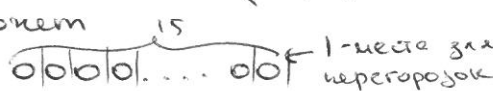


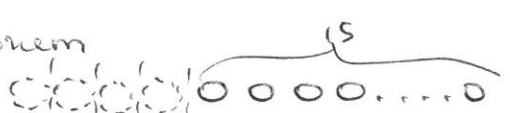
Дата: 26.06.2017

Летописец: Шреммикова Катя

Задачи (Шары и перегородки)

- ① Есть 15 разных шаров и 5 разных ящиков.
Сколько способов разложить по ящикам шары? (каждый шар должен быть рассмотрен)
Для каждого шара 5 вариантов
Ответ: 5^{15}

- ② 15 одинаковых шаров, 5 разных ящиков (m, k)
• ящик пустым быть не может
Ответ: $C_{14}^4 (C_{m-1}^{k-1})$ 
14 промежутков, 4 перегородки. В каждый промежуток можно поставить max 1 перегородку

- ящик пустым быть может
Ответ: $C_{19}^4 (C_{m+k-1}^{k-1})$ 
Добавлен $(k-1)$ шаров-призраков, а условие про пустой ящик не меняется.
Если перегородка стоит слева (один из соседних шаров-призраков), то в ящике слева от неё 0 шаров.

- ③ m белых шаров, k чёрных шаров, $m \geq k$, чёрные не рядом
Ответ: C_{m+1}^k

Выложим белые шары в ряд. Чёрные шары можно положить на $(m+1)$ место без возможности положить в 1 место.

- ④ $x+y+z+t=2017$, $x, y, z, t \in \mathbb{N}$

Ответ: C_{2016}^3

2017 шаров, 3 перегородки, в конце ставим перегородку
нельзя $\Rightarrow$ 2016 мест

(Для $a_1 + a_2 + \dots + a_n = A \Rightarrow C_{A-1}^{n-1}$)

- ⑤ 6 видов цветов. Нам нужен букет из 17 цветов.
Какой-то вид можно не брать.

Ответ: $C_{22}^5 (C_{17+6-1}^{6-1})$

6 ящиков, 17 шариков $\Rightarrow$ Анкет, 2,2

Дата: 26.06.2017

Летописец: Трешнякова Кате

⑥ На полке 12 книжек. Нужно выбрать 5, но нельзя брать соседние

Ответ: C_8^5

7 шариков, 5 перекрестков. Аналог. #3

⑦ 6 разных елики, 4 чёрных, 4 белых и 4 синих елики. Пустой елик быть может.

4 шарика, 5 перекрестков. Аналог. 2,2

Ответ: $(C_9^4)^3$

⑧ $x+y+z=100$, $1 \leq x, y, z \leq 60$, $x, y, z \in \mathbb{Z}$

Ⓘ Фиксируем x :

$x=1$	$y+z=99$	22 реш.	y от 39 до 60
$x=2$	$=98$	23	38 60

$x=38$	$=62$	59	2 60
39	$=61$	60	1 60
40	$=60$	59	1 59
$x=59$	$=41$	40	1 40
$x=60$	$=40$	39 реш.	1 39

$$22 + 23 + \dots + 60 + 39 + \dots + 59 = 2628$$

Ⓣ Решаем без ограничения:

$$C_{99}^2 - C_{39}^2 \cdot 3 = 2628$$



Дата: 27.06.2017

Летописец: Шремельева Кэти

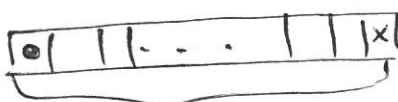
Решение задач в группах

- ② $\sum abc$, $\{a, b, c\} \in \{1, 2, 3, 4\}$, считать кол-во этих чисел k .
 $a, a_2, a_3 = abc$

Решение Фиксируем одну цифру a , с ней 16 вариантов abc .
 Аналогично для a_2 и a_3 .
 Будем отдельно считать $\sum_{k=1}^4 a_{1k}, \sum_{k=1}^4 a_{2k}, \sum_{k=1}^4 a_{3k}$

$$\begin{aligned} & \text{В сумме } 100(1 \cdot 16 + 2 \cdot 16 + 3 \cdot 16 + 4 \cdot 16) + \\ & + 10(1 \cdot 16 + 2 \cdot 16 + 3 \cdot 16 + 4 \cdot 16) + (1 \cdot 16 + 2 \cdot 16 + 3 \cdot 16 + 4 \cdot 16) = \\ & = 111 \cdot 16 \cdot 10 = 17760 \end{aligned}$$

Ответ: 17760

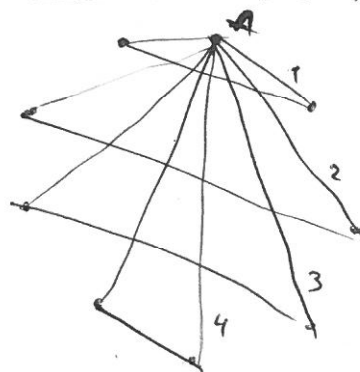
- ③  Фигура выходит на • и она может ходить на любое кол-во клеток за сколько ходов вправо

Сколько вариантов возможности попасть на $\boxed{x}$ за 1 ходов?

29 шаров, 4 перестановки, пустой ящик быть не может.
Ответ: $C_{28}^6 = C_{27}^{6-1}$ (не посл. клетку был ход, остаётся)
 28 клеток и 6 ходов

- ④ Треугольный 3-угольник. Сколько вариантов выбора 3-х вершин, чтобы они оказались вершинами равностороннего Δ ? 1 — — — — —

Δ вида 1 — 9
 Δ вида 2 — 9
 Δ вида 3 — 3 (окрашенные стороны)
 Δ вида 4 — 9

Ответ: 30

- ⑤ ~~Каков~~ Каков коэффициент при x^{100} в многочлене $(1+x+x^2+\dots+x^{100})^3$?

Коэффициент при x^{100} = кол-ву корней ур-ия $a+b+c=100$, $a, b, c \in [0; 100]$
 3 коробки, 100 шаров, могут быть пустые коробки. $a, b, c \in \mathbb{Z}$

Ответ: $C_{100+3-1}^{3-1} = C_{102}^2 = 5151$