



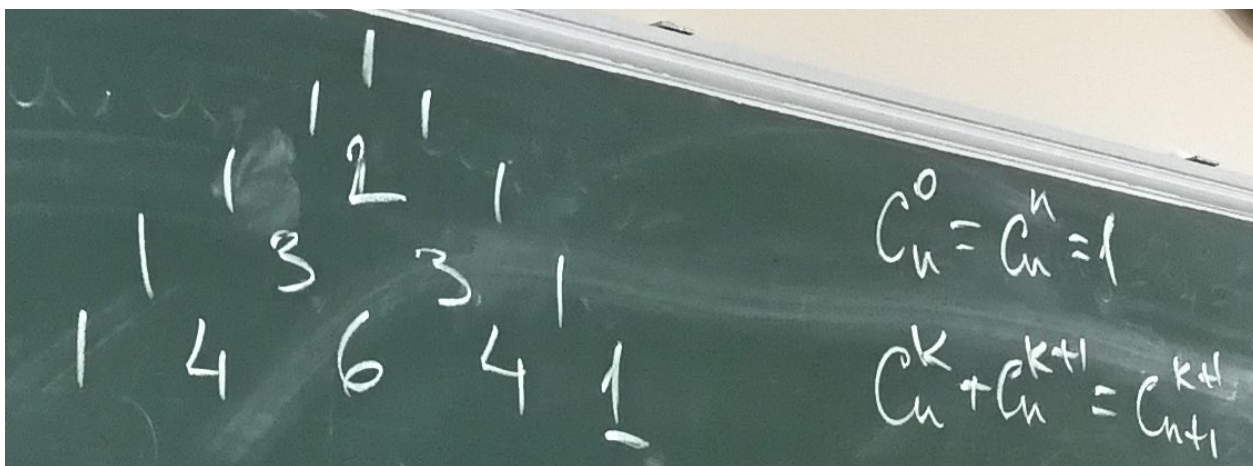
Математическая летопись ВОСЬМОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБМЕНА

ЛИЦЕЙ «НАУКОВА ЗМІНА»
(Киев, Украина)

ГИМНАЗИЯ ДЛЯ ОСОБО ОДАРЁННЫХ ДЕТЕЙ
(Швебиш Гмюнд, Германия)

"Комбинаторика"

05. – 12.10.2017 – немецкая группа в Украине



Mathematische Chronik

des

8. LGH - MATHE - SPRACH – AUSTAUSCHES

zwischen dem Lyceum „Naukova Zmina“ (Kiew, die Ukraine)

und

dem Landesgymnasium für Hochbegabte (Schwäbisch Gmünd, Deutschland)

"Kombinatorik"

05. – 12.10.2017 - Aufenthalt der deutschen Gruppe in der Ukraine

**Aufgaben des mathematischen Mannschaftswettbewerbs
Задачи командного математического конкурса
29.06.2017 (LGH)**

**Besprechung der Lösungen in Kiew / Обсуждение решений в Киеве
06.10.2017**

I. Runde / I. Тип

Aufgabe 1.

Der Turm steht auf dem linken Feld eines 1×30 karierten Streifens. In einem Zug kann er sich nach rechts beliebig weit bewegen.
Wie viele Möglichkeiten hat er, das letzte Feld zu erreichen?

Ладья стоит на крайнем левом поле клетчатой полоски 1×30 и за один ход может сдвинуться на любое количество клеток вправо.
Сколькими способами она может добраться до крайней правой клетки?

Aufgabe 2.

Eine Gerade überschneidet ein 2017 -eck und geht durch seine Eckpunkte nicht.
Beweise, dass sie eine gerade Anzahl seiner Diagonalen schneidet.

Прямая пересекает выпуклый 2017 -тиугольник и не проходит ни через одну его вершину.
Доказать, что она пересекает чётное число диагоналей этого 2017 -тиугольника

Aufgabe 3.

Welche natürlichen Zahlen zwischen 1 und 10^6 sind in der Mehrheit:
die, die sich als Summe einer Quadratzahl und einer Kubikzahl darstellen lassen,
oder
die, die sich so nicht darstellen lassen?

Каких чисел среди чисел от 1 до 10^6 больше:
тех, которые можно представить в виде суммы полного квадрата и полного куба,
или остальных?

II. Runde / II. Тип

Aufgabe 4.

Ein Schüler hat sechs Mathebücher, ein anderer – acht Mathebücher. Alle Bücher sind verschieden.
Wie viele Möglichkeiten gibt es, drei Bücher zwischen den beiden zu tauschen?

У одного школьника шесть книг по математике, а у другого восемь. Все книги разные.
Сколькими способами они могут осуществить обмен тремя книгами?

Aufgabe 5.

Сколькими способами можно разбить 10 баскетболистов на две команды по пять человек?

Wie viele Möglichkeiten gibt es, 10 Personen in zwei Basketballmannschaften je fünf Personen zu unterteilen?

Aufgabe 6.

Улитка должна проползти вдоль линий клезчатой бумаги путь длиной 10 и вернуться в исходный узел.
Сколько таких путей существует?

Eine Schnecke bewegt sich entlang den Linien des Gitters eines karierten Papiers. Sie muss einen Weg der Länge 10 zurücklegen und zum Startgitterpunkt wieder ankommen. Die Länge eines Kästchens ist 1.
Wie viele solche verschiedene Wege gibt es?

III. Runde / III. Typ

Aufgabe 7.

Wie viele Lösungen in den natürlichen Zahlen hat die Gleichung $xyz = 10^6$?

Сколько решений в натуральных числах имеет уравнение $xyz = 10^6$?

Aufgabe 8.

Es gibt 10 Mädchen und 10 Jungen. Wie viele Möglichkeiten gibt es, verschiedene Gesellschaften mit der gleichen Anzahl der Mädchen und der Jungen zu bilden?

Есть 10 девушек и 10 юношей.
Сколькими способами можно составить компанию, в которой одинаковое количество девушек и юношей?

Aufgabe 9.

Wie viele Zahlen $\overline{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5}$ mit $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq a_4 \geq a_5$ existieren?

существует чисел вида $\overline{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5}$, где $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq a_4 \geq a_5$?

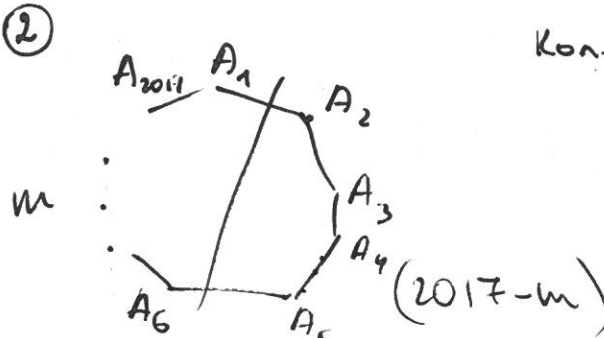
Дата: 06.10.2017

Летописец: Третьякова Катя

Решение задач с летнего обмена

- ① $\boxed{x} \boxed{28} \boxed{y}$ На 1 и посл. клетки точно
поставлены, а на другие 2 варианты: $\begin{cases} \text{проходим} \\ \text{не проходим} \end{cases}$

Ответ: 2^{28}

- ②  Кол-во диагоналей
 $m(2017-m)-2 \div 2$
одно чётно другое не
 $A_1 A_2$
 $A_5 A_6$
не диагонали

- ③ $A = m^2 + k^3$, $\{m; k\} \in \mathbb{N} \cup \{0\}$
 k : 101 вариантов (когда $k=0$) m : 1001 вариант ($m=0$)
 $n(A) < 1001 \cdot 101 < 500000$

- ④ $C_6^3 \cdot C_8^3$
выбор I выбор II

- ⑤ $\frac{C_{10}^5}{2} = C_9^4$ ← зафиксирован одного человека
← комбину №1 и №2 можно поменять местами

- ⑥ Тут лёгкие задачи кончились ☹

Дата: 06.10.2017

Летописец: Третьякова Катя

⑥ 1) $\begin{matrix} \xrightarrow{k} \\ \xleftarrow{k} \end{matrix}$ $k \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$

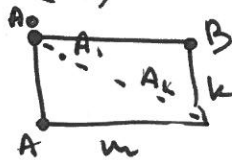
$\begin{matrix} \downarrow 5-k \\ \uparrow 5-k \end{matrix}$ $\left. \begin{matrix} k=0 \\ k=1 \\ k=2 \\ k=3 \\ k=4 \\ k=5 \end{matrix} \right\} + A(0) + A(1) + \dots + A(5) = \underline{N}$

$$A(k) = C_{10}^k \cdot C_{10-k}^k \cdot C_{10-2k}^{5-k} \cdot C_{5-k}^{5-k} = \frac{10!}{(k!)^2((5-k)!)^2}$$

выбор пути $\rightarrow$ $\leftarrow$ $\downarrow$ $\uparrow$

Ответ: N

2) $(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + (C_n^2)^2 + \dots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n$

кол-во путей C_n^m
 C_n^0 - пути через A_0
 C_n^1 - A_1
 C_n^k - A_k
Разобьем пути на группы вида $\begin{matrix} \rightarrow \uparrow \\ \leftarrow \downarrow \end{matrix}$ ①

В каждой из них по 5 шагов

$$C_{10}^5 \cdot \left((C_5^0)^2 + (C_5^1)^2 + \dots + (C_5^5)^2 \right) = (C_{10}^5)^2$$

↑
выбор места
для группы ①

кол-во выбора
для одной из двух ($\begin{matrix} \rightarrow \uparrow \\ \leftarrow \downarrow \end{matrix}$)

Дата: 06.10.2017

Летописец:

Третьякова Катя

⑦ $x y z = 10^6 \quad \{x, y, z\} \in \mathbb{N}$

$$x y z = 2^6 \cdot 5^6$$

$$\begin{matrix} \sqcup & \sqcup & \sqcup \\ x & y & z \end{matrix}$$

цифры могут быть нулевыми

C_8^2 способами мы можем раскидать двойки (6 двоек, 2 переноски)

Аналогично для "5"

Ответ: $(C_8^2)^2$

⑧ 1) $\left. \begin{matrix} 0;0 & (C_{10}^0)^2 \\ 1;1 & (C_{10}^1)^2 \\ k;k & (C_{10}^k)^2 \\ \vdots & \vdots \\ 10;10 & (C_{10}^{10})^2 \end{matrix} \right\} + C_{20}^{10}$

2) Выберем 10 любых людей. ~~Добавим девочек~~,
 $C_{20}^{10} - k$ дев.
 $(10-k)$ мальч.

К нашим выбранным мальчикам добавим
 $(10-k)$ девочек, которые не были выбраны

⑨ 1) 9 шаров, 5 переносок $0|00|0|0|0000 - 13345$
 1 число - a_1 - кол-во шаров до 1 переноски
 $k \quad a_k \quad k \quad 1 \leq k \leq 5$

Каждое число = определённой расстановке переносок

У нас 14 знаков, чтобы расставить шары C_{14}^5
 (шары) (переноски)

Но 00000 не является 5-значным числом

Ответ: $C_{14}^5 - 1$

Дата: 06.10.2017

Летописец: Третькова Катя

2) Если $a_1 > a_2 > a_3 > a_4 > a_5$, то кол-во чисел $\overline{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5}$
 C_{10}^5

Для числа с $a_1 > a_2 > a_3 > a_4 > a_5$ сконструирован
 число $(a_1+4)(a_2+3)(a_3+2)(a_4+1)a_5$,

где $a_1+4 > a_2+3 > a_3+2 > a_4+1 > a_5$

(могут быть $0, 1, 2, \dots, 9, A, B, C, D$)

Таких чисел $C_{14}^5 - 1$

↑
 00000
 43210

Дата: 06.10.2017

Летописец: Третьякова Катя

Δ Паскале и Тарталле (?)

$$\begin{aligned}
 2^0 &= 1 \\
 2^1 &= 1 \ 1 \\
 2^2 &= 1 \ 2 \ 1 \\
 2^3 &= 1 \ 3 \ 3 \ 1 \\
 2^4 &= 1 \ 4 \ 6 \ 4 \ 1 \\
 2^5 &= 1 \ 5 \ 10 \ 10 \ 5 \ 1
 \end{aligned}$$

1) сумма чисел
на четных местах
= сумме чисел на
нечетных местах

0 0 0 - Треугольник

2) В первом столбце 1 1 1 (+0)

II
III
IV

1 2 3 4 (+1)

1 3 6 10 15 (+2+3+4+5+...)

число равно сумме в прошлом
столбце до нашей строки

или III - сколько шаров нужно для Δ

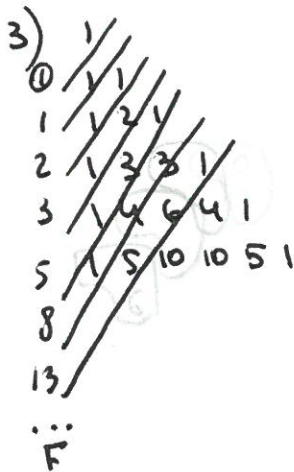
0 0 0
0 0 0
...

IV - для пирамиды

V - четырехмерной пирамиды

n - (n-1) мерной пирамиды

F-числа Фибоначчи



Дата: 07.10.2017

Летописец: Третьякова Катя

Последовательность X

1960s - Америка - "Каталог известных последовательностей"

Задача 1Сколько способов можно разбить выпуклый n-угольник непересекающимися диагоналями? ($F(n)$) $n=3$

①

 $n=4$

②

 $n=5$

⑤



← для каждой вершины

 $n=7$

④2

 $n=6$

①4

диагонали с одной вершины - 6



- 6

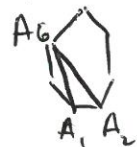
- 2

Зафиксируем A_1, A_2 , которая входит в $\triangle$

1) если

 $\triangle A_1 A_2 A_3$
 $F(6) = 14$ + симметрично $+ F(6)$

2)

 $\triangle A_1 A_2 A_6$
 $F(5)$ + симм. $+ F(5)$

3)

 $F(4) + F(4)$

$$F(7) = F(6) \cdot 2 + F(5) \cdot 2 + F(4) = 28 + 10 + 4 = 42$$

 $n=8$

①32

Задача 2На окружности 2n точек. Проводим n непересекающихся хорд, не выходящих из одной точки. Сколько вариантов? ($P(n)$) $n=1$

①

 $n=2$

②



- 2

 $n=3$

⑤



- 3



- 2

 $n=4$ Фиксируем вершину A_1 , из которой выходит 1 хорда. A_1 может быть соединено с A_2, A_4, A_6 1) $A_1 A_2$ $P(3)$ + симм. $P(3)$ 2) $A_1 A_4$ $P(2)$ + симм. $P(2)$ $P(4) = 2P(3) + 2P(2) = 14$

Дата: 07.10.2017

Летописец: Третьякова Катя

Видим, что $F(n) = P(n-2)$, где $n \geq 3$ Задача №3

$$(abc) = a(bc)$$

Сколько вариантов мы можем выбрать корезок множителей? (Поставить скобки) ($K(n)$)

$$n=2 \quad ab \quad (1)$$

$$n=3 \quad (abc) \quad (2)$$

$$n=4 \quad ((ab)c)d \quad (5)$$

$$n=5 \quad abcde$$

Фиксируем посл. умножение

$$\begin{aligned}
 & \circ ab \quad K(1) \cdot K(4) = 1 \cdot 5 = 5 \\
 & \circ ab \cdot cde \quad K(2) \cdot K(3) = 1 \cdot 2 = 2 \\
 & \circ abc \cdot de \quad 2 \\
 & \circ abcd \cdot e \quad 5 \quad K(5) = (14)
 \end{aligned}$$

Видим, что $F(n) = P(n-2) = K(n-1)$ — числа Каталана (C_n)

$$F(2) = 1 = K(1) = P(0)$$

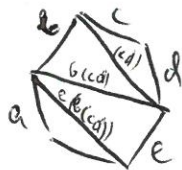
$$C_n = K(n)$$

$$F(n+1)$$

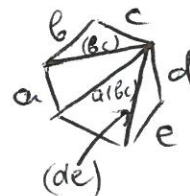
$$P(n-1)$$

Покажем соответствие

$$(a(bc)de) \Rightarrow$$



$$\Rightarrow a(b(c(d)e))$$



$$\Rightarrow C_n = F(n+1)$$

То, что они совпадают, следует из алгоритма.

Дата: 09.10.2017

Летописец:

Третьякова Катя

Формула чисел КаталанаУ нас есть множители $a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}$ Допустим, мы знаем для $a_1, \dots, a_n$

Посмотрим на последнее произведение:

$$\odot \underbrace{a_1}_{1} \cdot \underbrace{a_2 a_3 \dots a_n}_{n} \cdot a_{n+1} \quad C_1 \cdot C_n$$

$$\odot \underbrace{a_1 a_2}_{2} \cdot \underbrace{a_3 \dots a_n}_{n-1} \cdot a_{n+1} \quad C_2 \cdot C_{n-1}$$

... так, далее.

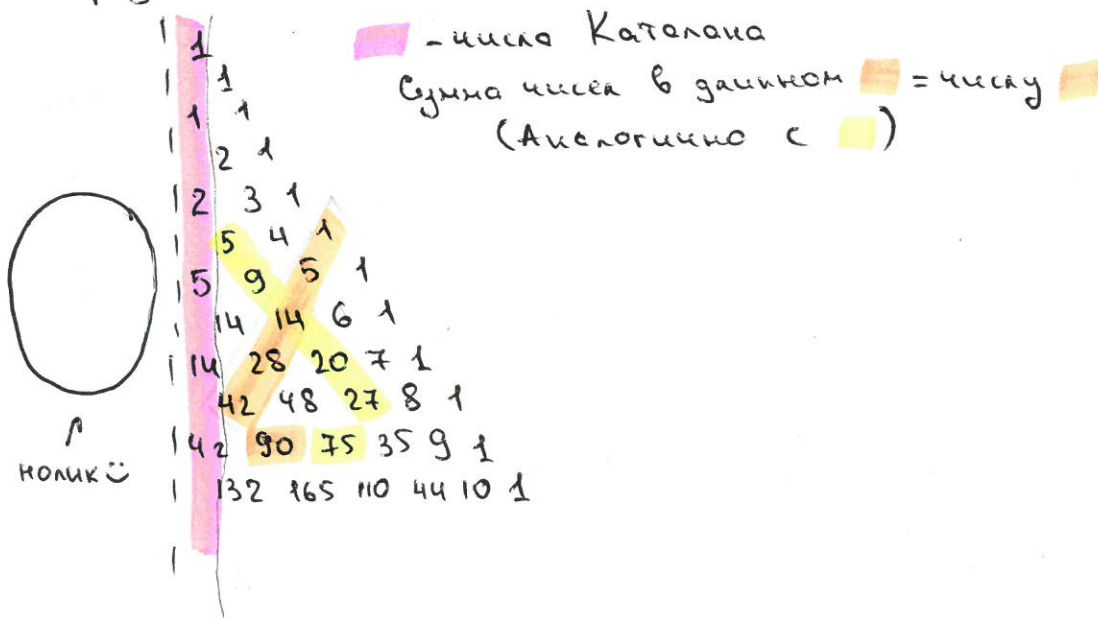
$$\odot \underbrace{a_1 a_2 a_3 \dots a_n}_{n} \cdot \underbrace{a_{n+1}}_1 \quad C_n \cdot C_1$$

$$C_{n+1} = C_1 \cdot C_n + C_2 \cdot C_{n-1} + \dots + C_n \cdot C_1$$

↑
рекуррентная
формула
чисел
Каталана

Пример

$$\begin{array}{r} 1 \ 1 \ 2 \ 5 \ 14 \\ 14 \ 5 \ 2 \ 1 \ 1 \\ \hline 14 \ 5 \ 4 \ 5 \ 14 = 42 \\ + \end{array}$$

Треугольник Каталана

Дата: 09.10.2017

Летописец: Гретькова Камилла

Докажем, что это число Каталана.

• У нас есть $((((a \ b) \ c) \ d) \ e) \ f)$

Закрывающиеся скобки - в кучерку (вместе с посл. буквой)

Все остальные буквы $\Rightarrow$ ")"Получаем: $((((()))))))$ На промежутке [начало; конец] кол-во "(" $\geq$ ")"

• Наоборот

 $((() (()) ()))$ ~~$((() (()) ()))$~~ $(((a ((b \ c)) (d \ e))) \ f)$ Двигаться по Δ можно $\left[\begin{array}{l} \nearrow \\ \searrow \end{array} \right]$ Сколькоми способами можно от первой "1" добраться до (n) ?Ответ: n (по технике построения очевидно)При этом $\nearrow > \searrow$ (иначе мы бы пересекли n мистери Нулю)Заменяем $\searrow \rightarrow ($, а $\nearrow \rightarrow)$. Получили последовательность скобок и, наоборот, мы можем восстановить путь по скобкам. Для n кол-во "(" = кол-во ")" $\Rightarrow$ для них ответ - число Кат.ФормулаЕсли мы сможем представить множители, то $R_n = C_n \cdot n!$ Рассмотрим произведение n чисел, n - число Родригеса, n - это n чисел $a \cdot b$ именно в такой порядкеПусть S - произведение $(n+1)$ чиселМожет получим $(f \cdot a) \cdot b$ $(a \cdot f) \cdot b$ $a \cdot (f \cdot b)$ $a \cdot (b \cdot f)$ У нас для n чисел $(n-1)$ операций умноженияТо есть для $(n+1)$ чисел $n(n-1)$ операцийПри этом мы не злим, когда $f \cdot P$ и $P \cdot f$ (f - посл. операция)

$$R_{n+1} = (4n-2) R_n = (4n-2)(4n-6) R_{n-1} = (4n-2)(4n-6)(4n-10) R_{n-2} = \dots \cdot 6 \cdot 2$$

$$C_n = \frac{(4n-6)(4n-10) \dots \cdot 6 \cdot 2}{n!} = \frac{2^{n-1} (2n-3)(2n-5) \dots \cdot 3 \cdot 1}{n!} =$$

Дата: 09.10.2017

Летописец:

Тренева Каша

$$\begin{aligned}
 \ominus \frac{2^{n-1} (2n-2)!}{2^{n-1} n! (n-1)!} &= \frac{n (2n-2)!}{(n!)^2} = \frac{(2n-2)!}{n! (n-1)!} = \frac{(2n-1)!}{n! (n-1)! (2n-1)} = \\
 &= \boxed{C_{2n-1}^n \cdot \frac{1}{2n-1}}
 \end{aligned}$$

Биноми Ньютона и другое

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \dots + C_n^n b^n$$

$$(x_1 + x_2 + x_3)^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2(x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3)$$

$$\begin{aligned}
 (x_1 + x_2 + x_3)^4 &= x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + 4(x_1^3 x_2 + x_1^3 x_3 + x_2^3 x_1 + x_2^3 x_3 + x_3^3 x_1 + x_3^3 x_2) + \\
 &+ 6(x_1^2 x_2^2 + x_1^2 x_3^2 + x_2^2 x_3^2) + 10 x_1 x_2 x_3 (x_1 + x_2 + x_3)
 \end{aligned}$$

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_k)^n = \sum \boxed{A} x_1^{d_1} x_2^{d_2} x_3^{d_3} \dots x_k^{d_k}$$

$$d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + \dots + d_k = n$$

$$\underbrace{(x_1 + x_2 + \dots + x_k)}_{\substack{\alpha_1 \\ \text{чтобы получить } x_1^{\alpha_1}}} \underbrace{(x_1 + x_2 + \dots + x_k)}_{\alpha_2} \dots \underbrace{(x_1 + x_2 + \dots + x_k)}_{\alpha_k} \underbrace{(x_1 + x_2 + \dots + x_k)}_{\alpha_k}$$

n

Вспомогательная формула для размещения с повторениями

$$P(n, n_1, n_2, n_3, \dots, n_k) = \frac{(n_1 + n_2 + \dots + n_k)!}{n_1! n_2! n_3! \dots n_k!}$$

$$A = \frac{n!}{d_1! d_2! \dots d_k!}$$

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_k)^n = \sum_{d_1 + \dots + d_k = n} x_1^{d_1} x_2^{d_2} \dots x_k^{d_k} \cdot A, \quad d_i \geq 0, d_i \in \mathbb{Z}$$

Но коэф. A у нас будет одинаковой, ведь если мы возьмём вариацию $x_1^{d_1} x_2^{d_2} x_3^{d_3} \dots x_k^{d_k}$, то A не поменяется "

ОБЩАЯ
ФОРМУЛА

Дата: 10.10.2017

Летописец:

Третьякова Катя

Давайте разложим $(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^5 = \dots + A x_1^{a_1} x_2^{a_2} x_3^{a_3} x_4^{a_4} + \dots$
 $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq a_4$

Многочлен:

x_1^5	Варианты: (5; 0; 0; 0)	1
$x_1^4 x_2$	(4; 1; 0; 0)	5
$x_1^3 x_2^2$	(3; 2; 0; 0)	10
$x_1^3 x_2 x_3$	(3; 1; 1; 0)	20
$x_1^2 x_2^2 x_3$	(2; 2; 1; 0)	30
$x_1^2 x_2 x_3 x_4$	(2; 1; 1; 1)	60

$$(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^5 = \left[\underbrace{x_1^5}_{\substack{4 \text{ штуки} \\ C_4^1}} + \underbrace{5x_1^4 x_2}_{\substack{12 \text{ шт} \\ C_4^1 \cdot C_3^1}} + \underbrace{10x_1^3 x_2^2}_{\substack{12 \text{ шт} \\ A_4^2}} + \underbrace{20x_1^3 x_2 x_3}_{\substack{12 \text{ шт} \\ \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{2}}} + \underbrace{30x_1^2 x_2^2 x_3}_{\substack{12 \text{ шт} \\ \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{2}}} + \underbrace{60x_1^2 x_2 x_3 x_4}_{\substack{4 \text{ шт} \\ \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3!}}} \right]$$

Тут преподаватели написали не совсем полную формулу, но мы построим кое-что: штуку в [] напишем, но каждую штуку можно написать L раз, заменив x_i на другие варианты (симметрично)

P.S: при замене x_1 на x_2 и x_2 на x_1 и т.п. получим все остальные штуки

Потом её обобщили (и слова алгебре!):

$$(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^5 = x_1^5 + x_2^5 + x_3^5 + x_4^5 + 5 \left(\sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} x_i^4 x_j \right) + 10 \left(\sum_{\substack{i,j,k \\ i \neq j \neq k}} x_i^3 x_j x_k \right) + 30 \left(\sum_{\substack{i,j,k,l \\ i \neq j \neq k \neq l}} x_i^2 x_j x_k x_l \right) + 60 \left(\sum_{\substack{i,j,k,l,m \\ i \neq j \neq k \neq l \neq m}} x_i x_j x_k x_l x_m \right) + 10 \left(\sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} x_i^3 x_j^2 \right)$$

Интересный факт

Сумма всех коэф. равна k^n