

Datum: 17.6.16

Chronist: Cornelius Krouse

Der Tag fing an mit einem Vortrag Herrn Goldsteins über die Geschichte von Zahlen und einer Einführung in die komplexen Zahlen. Diese haben nicht nur einen reellen Teil, sondern auch einen imaginären Teil, welcher mit i bezeichnet wird.

Beispiel: $a + bi$
 $\nearrow$ reeller Teil $\nwarrow$ imaginärer Teil

Mit diesen Zahlen kann gerechnet werden, wie mit den reellen Zahlen auch.

$$ai; a \in \mathbb{R}$$

$$z = a + bi; \{a, b\} \in \mathbb{R}$$

$$z_1 = a_1 + b_1 i \quad z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$$

$$z_2 = a_2 + b_2 i \quad z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i$$

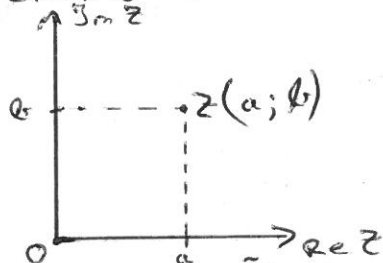
$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = a_2 \\ b_1 = b_2 \end{cases}$$

Jeder komplexen Zahl kann ein reelles Zahlenpaar zugeordnet werden.

$$z \leftrightarrow (a; b)$$

$$z = 3 - 2i \quad (3; -2)$$

$$z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow b = 0$$



Überlegungen für den Beweis der Multiplikation

$$z_1 = a_1 + b_1 i$$

$$z_2 = a_2 + b_2 i$$

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = a_1 a_2 + a_1 b_2 i + a_2 b_1 i + b_1 b_2 i^2$$

$$= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i$$

$$z_1 z_2 \stackrel{\text{def}}{=} (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i$$

$$a_1 a_2; (a_1; 0) \cdot (a_2; 0) = (a_1 a_2 - 0; a_1 0 + a_2 0) = (a_1 a_2; 0)$$

$$i(0; 1)$$

$$i^2 = i \cdot i = (0; 1)(0; 1) = (0 - 1; 0 + 0) = (-1; 0) = -1$$

$$z = a + bi$$

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\bar{z} = z^* = a - bi$$

$$\bar{\bar{z}} = (z^*)^* = a + bi = z$$

$$|z| = |\bar{z}|$$

Datum: 17.6.16

Chronist: Cornelius Kuse

$$z \cdot z^* = (a+bi)(a-bi) = (a; b)(a; -b) = (a^2 - b(-b); a(-b) + ab) = (a^2 + b^2; 0) = |z|^2$$

$$z = a_1 + b_1 i \quad K \in \mathbb{R} \quad K \Leftrightarrow (K; 0)$$

$$(a_1; b_1)(K; 0) = (a_1 K - b_1 0; a_1 0 + b_1 K) = (a_1 K; b_1 K)$$

↳ Vektoraddition

$$z = -z^*$$

$$a+bi = -(a-bi)$$

$$a+bi = -a+bi$$

$$a = 0$$

$$z \cdot i$$

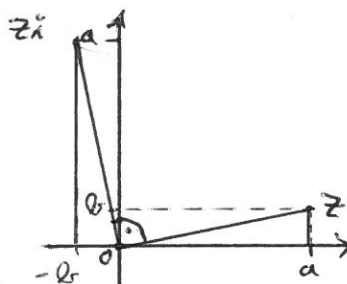
$$(a+bi)i = ai + bi^2 = -b + ai$$

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad |z \cdot i| = |z|$$

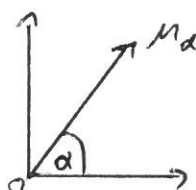
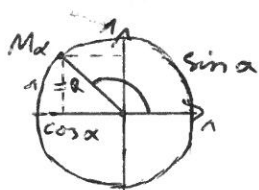
$$|z \cdot i| = \sqrt{(-b)^2 + a^2}$$

$$z \rightarrow z \cdot i$$

mit i multiplizieren führt
zu einer Drehung um 90° !



Die beiden Dreiecke sind kongruent
der Winkel dazwischen beträgt 90°



$$M_\alpha(R \cos \alpha; R \sin \alpha)$$

$$|z|, \arg z = \alpha$$

$$0 \leq \arg z < 2\pi$$

$$\text{Arg } z = \arg z + 2\pi n; n \in \mathbb{Z}$$

$$z = a + bi$$

$$a = |z| \cos \alpha$$

$$b = |z| \sin \alpha$$

$$z = |z| \cos \alpha + |z| \sin \alpha \cdot i$$

$$z = |z| (\cos \alpha + i \sin \alpha)$$

$$\cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{a}{|z|}$$

$$\sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{b}{|z|}$$

Datum: 17.6.16

Chronist: Cornelius Kause

$$z_1 = a_1 + b_1 i = |z_1| (\cos \alpha_1 + i \sin \alpha_1)$$

$$z_2 = a_2 + b_2 i = |z_2| (\cos \alpha_2 + i \sin \alpha_2)$$

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= |z_1| \cdot |z_2| ((\cos \alpha_1 \cos \alpha_2 - \sin \alpha_1 \sin \alpha_2) + i (\cos \alpha_1 \sin \alpha_2 + \cos \alpha_2 \sin \alpha_1)) \\ &= |z_1| |z_2| (\cos(\alpha_1 + \alpha_2) + i \sin(\alpha_1 + \alpha_2)) \end{aligned}$$

$$\operatorname{Arg}(z_1 z_2) = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2$$

$$|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$$

$$\arg(z_1 z_2) = \begin{cases} \arg z_1 + \arg z_2 + \dots < 2\pi \\ \arg z_1 + \arg z_2 + \dots - 2\pi \\ \arg z_1 + \arg z_2 > 2\pi \end{cases}$$

$$z \cdot i$$

$$z = |z| (\cos \alpha + i \sin \alpha) \quad i = 1 (\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2})$$

$$z \cdot i = |z| (\cos(\alpha + \frac{\pi}{2}) + i \sin(\alpha + \frac{\pi}{2}))$$

Dann kann eine Übung:

$$z_1 = \sqrt{6} + \sqrt{2} i$$

$$z_2 = -2i$$

$$z_1 = 2\sqrt{2} (\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6})$$

$$z_2 = 2 (\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2})$$

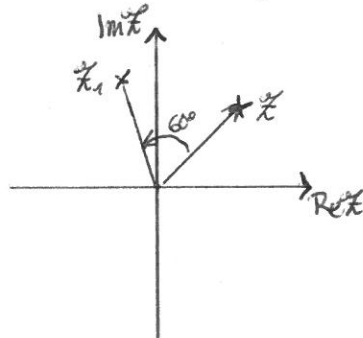
$$z_1 z_2 = 4\sqrt{2} (\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6}) = 4\sqrt{2} (\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}) = 2\sqrt{2} - 2\sqrt{6} i$$

Am folgenden Nachmittag besuchte die komplette Gruppe den Hochseilgarten „Skysport“ in der nahen Umgebung, welches allen sehr gut gefiel, obwohl das Wetter nicht ganz mitspielen wollte.

Datum: 18.06.2016

Chronist: Gabriel N. Pelger

Die Fortsetzung des Unterrichts übernahm Herr Redow. Bevor er damit anfangen, besprachen wir die am Vortag als Hausaufgabe aufgegebenen Fragestellungen; es handelte sich dabei um das Formulieren einer Funktion, die einen Punkt auf einen um 60° gedrehten $\mathbb{K}$ abbilden sollte, auf der komplexen Ebene.



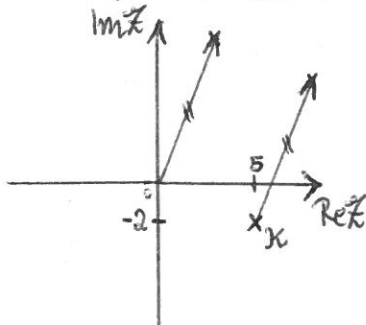
Es galt, das Argument um $60^\circ \hat{=} \frac{\pi}{3}$ zu vergrößern:

$$f(z) = z \cdot z_2 \quad |z_2| = 1 \quad \arg z_2 = \frac{\pi}{3}$$

$$z_2 = 1 \cdot \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$f(z) = z \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

Die zweite Aufgabe bestand darin, mithilfe der komplexen Zahlen eine zentrische Streckung um einen Streckfaktor $n=2$ ausgehend vom Streckzentrum $K(5-2i)$ zu beschreiben.



Wir beschreiben den Bildpunkt z' als $z' = n z + (n-1)(-5+2i)$.

Dies folgt der allgemeinen Form

$$f(z) = K z - (K-1) z_0, \quad H(P(z_0); K) \quad K \in \mathbb{R}$$

die sich aus

$$f(z) = K(z - z_0) + z_0 \quad \text{ableitet}$$

Nachdem wir die Aufgaben besprochen hatten, wiederholten wir mit Herrn Redow kurz die Addition bzw. Subtraktion und die Multiplikation komplexer Zahlen, denn beide Rechenoperationen bilden Voraussetzungen für die Division mit komplexen Zahlen.

Zuerst behandeln wir die algebraische Division:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} = \frac{(a_1 + b_1 i)(a_2 - b_2 i)}{|z_2|^2} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2 - (a_1 b_2 - a_2 b_1) i}{a_2^2 + b_2^2}$$

Analog zum Rechnen mit einer irrationalen Zahl im Zähler eines Bruchs erweitern wir mit der komplex konjugierten Zahl z^* , um z_2 in den Nenner zu bringen.

Im Folgenden behandeln wir auch die trigonometrische Variante:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|(\cos(\alpha_1) + i \sin(\alpha_1))}{|z_2|(\cos(\alpha_2) + i \sin(\alpha_2))} = \frac{|z_1|}{|z_2|} \cdot \frac{\cos(\alpha_1)\cos(\alpha_2) + \sin(\alpha_1)\sin(\alpha_2) - (i\cos(\alpha_1)\sin(\alpha_2) - i\sin(\alpha_1)\cos(\alpha_2))}{\cos^2(\alpha_2) + \sin^2(\alpha_2)}$$

$$\frac{\cos(\alpha_1)\sin(\alpha_2)}{\sin^2(\alpha_2)} = \frac{|z_1|}{|z_2|} \cdot \cos(\alpha_1 - \alpha_2) + i \sin(\alpha_1 - \alpha_2)$$

Zur trigonometrischen Lösung gehört auch das Argument:

$$\frac{z_1}{z_2} = z_5 \quad |z_5| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \quad \arg z_5 = \arg \frac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2$$

Datum: 18.06.2016

Chronist: Gabriel N. Pelgen

Dabei ist das Hauptargument folgend festgelegt:

$$\arg \frac{z_1}{z_2} = \begin{cases} \arg z_1 - \arg z_2, & \arg z_1 \geq \arg z_2 \\ \arg z_1 - \arg z_2 + 2\pi, & \arg z_1 < \arg z_2 \end{cases}$$

Herr Hilow stellte uns auch eine dritte Lösungsart vor:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot z_2^*}{|z_2|^2}$$

Die Simplität dieses Lösungswegs sagte gewiss allen zu.

Zur Division mit komplexen Zahlen führten wir auch ein paar Übungen durch:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{1+2i+i^2}{1-i^2} = \frac{2i}{2} = i$$

Das war eine algebraische Lösungsart.

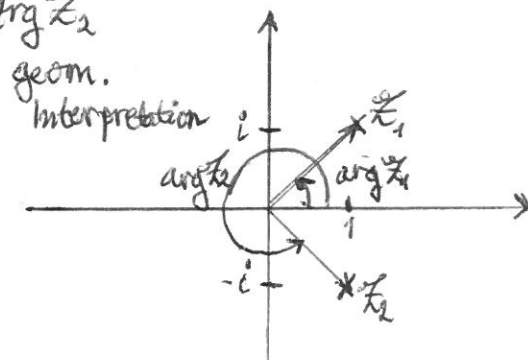
$$|z_5| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \quad \arg z_5 = \arg z_1 - \arg z_2$$

$$\frac{|z_1|}{|z_2|} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1$$

$$\arg \frac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{7\pi}{4} = -\frac{3\pi}{2}$$

$$z_5 = 1(\cos(-\frac{3\pi}{2}) + i\sin(-\frac{3\pi}{2})) = i$$



Und das war die entsprechende trigonometrische Lösung.

Wir interpretierten unsere Lösung geometrisch ~~mathematisch~~.

Als nächstes wurde das Hochrechnen thematisiert.

Dabei folgt eine solche Operation algebraisch der Form

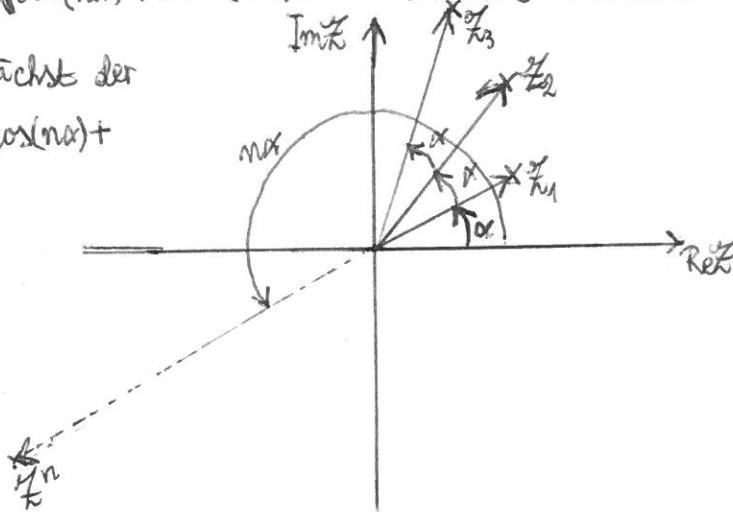
$$z^n = (a+bi)^n$$

und trigonometrisch der Form

$$z^n = |z|^n (\cos(n\alpha) + i\sin(n\alpha)), \quad n \in \mathbb{N} \rightarrow \text{Moivre-Formel}$$

Wenn $|z| > 1$ wächst der

Vektor $z^n = \cos(n\alpha) + i\sin(n\alpha)$



Datum: 18.06.2016

Chronist: Gabriel N. Pelgen

Bei der Gleichrechnung mit komplexen Zahlen ist zu beachten, dass $i^4 = 1$.
Mithilfe einer Übung $z = i$ $z^{2016} = |z|^{2016} (\cos(2016\alpha) + i \sin(2016\alpha))$

$$= \cos(2016\alpha) + i \sin(2016\alpha)$$

bereiten wir uns auf schwierigere Rechnungen vor, z.B.

$$z = -1 + \sqrt{3}i \quad z^{20} = |z|^{20} (\cos(20\alpha) + i \sin(20\alpha)) = 2^{20} (\cos(\frac{20\pi}{3}) + i \sin(\frac{20\pi}{3}))$$

$$|z| = 2^{20}$$

$$\text{Arg } z = \frac{2\pi}{3} \cdot 20$$

$$\arg z = \frac{4\pi}{3}$$

$$z = 2^{20} (\cos(\frac{4\pi}{3}) + i \sin(\frac{4\pi}{3})) = 2^{20} (-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i)$$

$$z = -2^{19} - 2^{19}\sqrt{3}i$$

Als nächstes brachte uns Herr Diedow die Regeln des Wurzelziehens bei.

$$x^2 = a \quad \sqrt[n]{a} = z \quad z^n = a$$

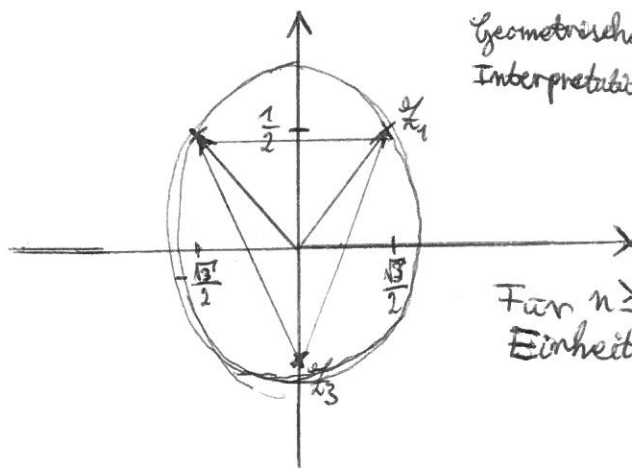
Der Hauptunterschied zu den reellen Zahlen liegt darin, dass in den komplexen Zahlen alle Zahlen, die eine Lösung der obigen Aufgabe sind, damit (mit einer Wurzel) ausgedrückt werden; nicht nur positive.

$$z^3 = i \quad z^3 = |z|^3 (\cos(3\alpha) + i \sin(3\alpha))$$

$$= 1 (\cos(\frac{\pi}{2}) + i \sin(\frac{\pi}{2})) = \cos(\frac{5\pi}{2}) + i \sin(\frac{5\pi}{2})$$

$$\alpha_1 = \frac{\pi}{6} \quad \alpha_2 = \frac{5\pi}{6} \quad \alpha_3 = \frac{3\pi}{2} \quad \alpha_4 = \frac{13\pi}{6} = \alpha_1 + 2\pi \rightarrow \text{keine neue Lösung}$$

$$z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \quad z_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \quad z_3 = -i$$



Geometrische Interpretation

Wir verallgemeinern:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} \left(\cos\left(\frac{\alpha + 2\pi k}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\alpha + 2\pi k}{n}\right) \right)$$

$$k = 0, 1, \dots, n-1$$

n - Anzahl der versch. Lösungen

Für $n \geq 3$ bilden die Punkte im Einheitskreis ein regelmäßiges n -Eck.

Um unser unabhängiges Verständnis des Inhalts zu überprüfen gab uns Herr Diedow noch zwei Hausaufgaben auf. Der Unterricht war erhellend und machte scheinbar allen Spaß.

Datum: 15.6.2016

Chronist: Felix Schuerzinger

Nach dem Frühstück begannen wir um 9:40, die hergeleiteten Gesetze der komplexen Zahlen zu wiederholen und zu erweitern.

① $z_1 \pm z_2 \Leftrightarrow$ Vektoraddition (Parallelogramm)

② $z_1 \cdot z_2 \Leftrightarrow$ Dreh (Streckung)

③ $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot z_2^*}{|z_2|^2}$

④ $z^* = a - bi$

⑤ $|z|^2 = z \cdot z^*$

⑥ $z = z^* \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$

Wdh.

Weiterführung:

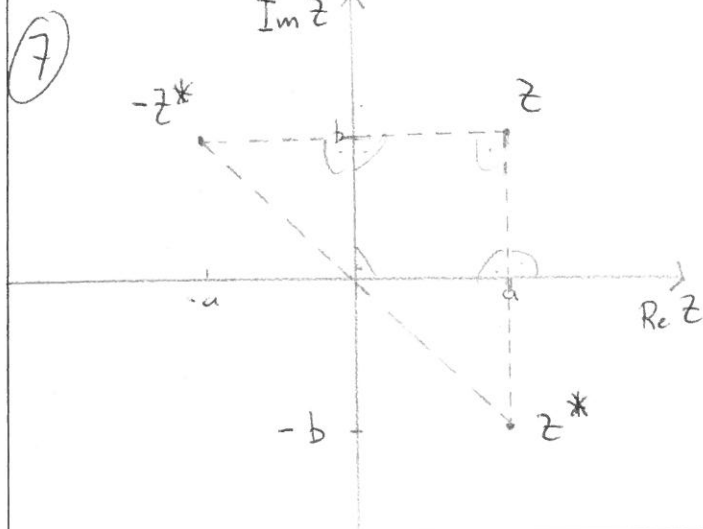
⑦ $z = -z^* \Leftrightarrow z \in i\mathbb{R} \quad ?$

⑧ $(z_1 \pm z_2)^* = z_1^* \pm z_2^*$

⑨ $(z_1 \cdot z_2)^* = z_1^* \cdot z_2^*$

⑩ $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^* = \frac{z_1^*}{z_2^*}$

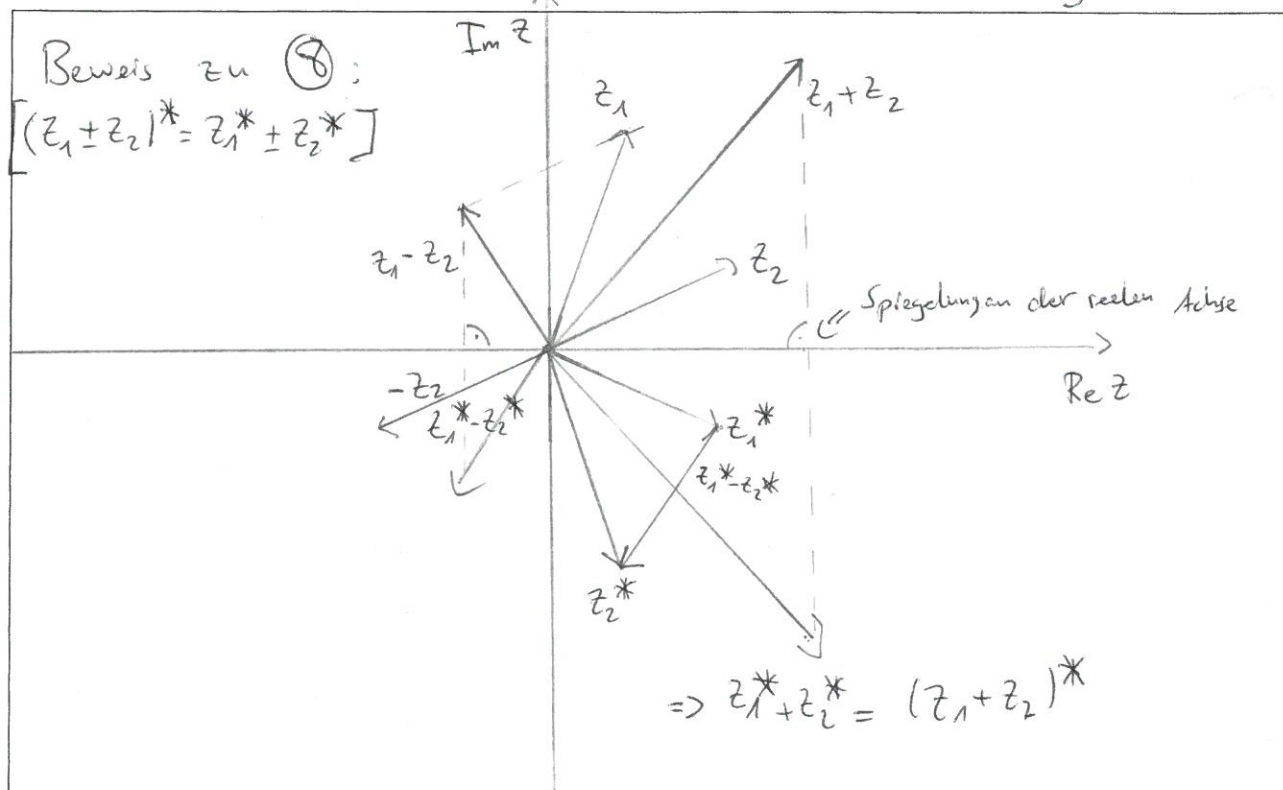
$\Rightarrow$ 7-10 Beweisen:



$\Rightarrow$ Um z^* zu erhalten, spiegelt man z an der reellen Achse
 $\Rightarrow$ Durch Spiegelung von z^* am Ursprung erhält man $-z^*$
 $(-z^* = -(z^*) = -(a - bi) = -a + bi)$
 $\Rightarrow$ da $-z^*$ nun offensichtlich eine Spiegelung von z an der imaginären Achse ist (rechter Winkel) bedeutet dies, dass z nur dann $-z^*$ ist, wenn $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow$ Beweis zu ⑦)

Datum: 19.6.2016

Chronist: Felix Schuerzinger



Beweis zu ⑨: $[(z_1 \cdot z_2)^* = z_1^* \cdot z_2^*]$

$$z_1 = |z_1| \cdot (\cos \alpha_1 + i \sin \alpha_1)$$

$$z_2 = |z_2| \cdot (\cos \alpha_2 + i \sin \alpha_2)$$

$$z_1^* = |z_1| \cdot (\cos \alpha_1 + i \sin (-\alpha_1)) \quad [\text{der Kosinus bleibt von der Spiegelung } (\alpha_1 \rightarrow -\alpha_1) \text{ unbeeinträchtigt}]$$

$$z_2^* = |z_2| \cdot (\cos \alpha_2 + i \sin (-\alpha_2))$$

$$\begin{aligned} z_1^* \cdot z_2^* &= (|z_1| \cdot |z_2|) \cdot (\cos (\alpha_1 + \alpha_2) + i \sin (-(\alpha_1 + \alpha_2))) \\ &= |z_1| \cdot |z_2| \cdot (\cos (\alpha_1 + \alpha_2) - i \sin (\alpha_1 + \alpha_2)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (z_1 \cdot z_2)^* &= (|z_1| \cdot |z_2| \cdot (\cos (\alpha_1 + \alpha_2) + i \sin (\alpha_1 + \alpha_2)))^* \\ &= |z_1| \cdot |z_2| \cdot (\cos (\alpha_1 + \alpha_2) - i \sin (\alpha_1 + \alpha_2)) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ somit gilt ⑨

Folge: $(t \cdot z)^* = t \cdot z^* \quad (\Leftrightarrow) \quad t \in \mathbb{R}$

Datum: 15.6.2016

Chronist: Felix Schwerzinger

Beweis zu (10): $\left[\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^* = \frac{z_1^*}{z_2^*}\right]$

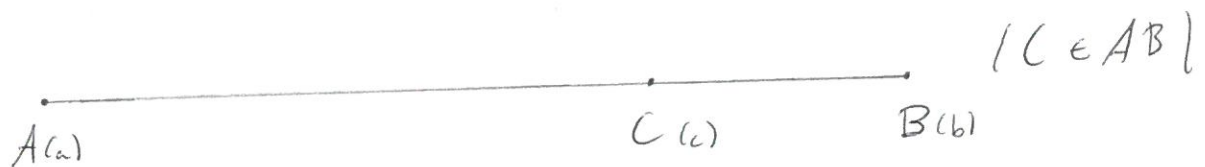
$$\begin{aligned} \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^* &\stackrel{\text{siehe (3)}}{=} \left(\frac{z_1 \cdot z_2^*}{|z_2|^2}\right)^* = \left(\frac{z_1}{|z_2|^2}\right)^* \cdot (z_2^*)^* = \\ &= \left(\frac{1}{|z_2|^2} \cdot z_1\right)^* \cdot z_2 \stackrel{\text{siehe (3)}}{=} \frac{1}{|z_2|^2} \cdot z_1^* \cdot z_2 \end{aligned}$$

Anmerkung:

$$|z|^2 = z \cdot z^* \quad (\text{siehe (5)})$$

$$= \frac{1}{z_2 \cdot z_2^*} \cdot z_2 \cdot z_1^* = \frac{1}{z_2^*} \cdot z_1^* = \frac{z_1^*}{z_2^*}$$

Lösung von Aufgaben in der Geometrie durch Nutzung komplexer Zahlen



$$\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = \lambda > 0$$

$a, b, c \in \mathbb{C}$
(Spiegeln A, B, C durch komplexe Zahlen wieder)

Gegeben: $A; B; \lambda$ Gesucht: C

$$\lambda = \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}}$$

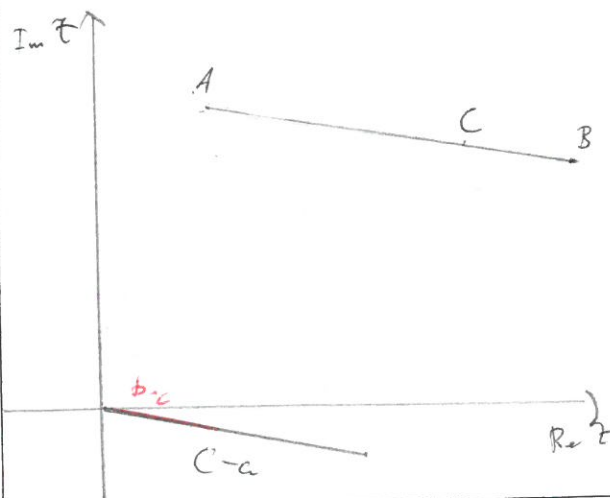
$$\lambda = \frac{c-a}{b-c}$$

$$\Rightarrow \lambda \cdot (b-c) = c-a$$

$$c-a = \lambda \cdot (b-c)$$

$$c(1+\lambda) = a + \lambda b$$

$$c = \frac{a + \lambda b}{1 + \lambda}$$



Datum: 19.6.2016

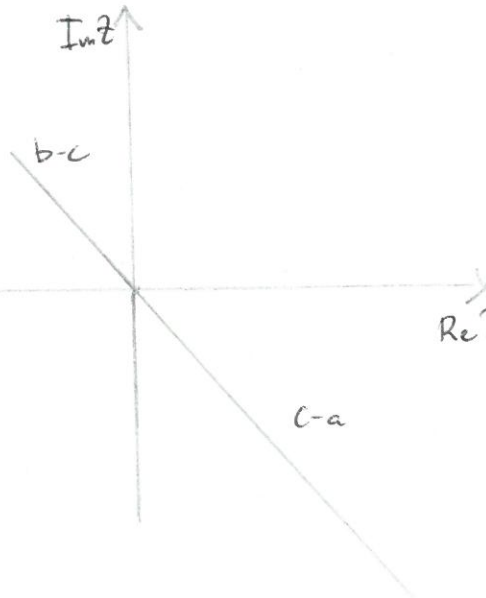
Chronist:

Felix Schmerzinger

Was, wenn:



$$\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = k > 0$$



$$c - a = -k \cdot (b - c)$$

$$[\text{weil } \frac{c-a}{c-b} = k]$$

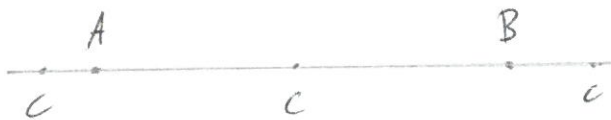
$$-k := \lambda$$

$$\text{Re } z \quad c = \frac{a + \lambda b}{1 + \lambda} \text{ gilt wieder}$$

$$\text{wobei } \lambda \neq -1$$

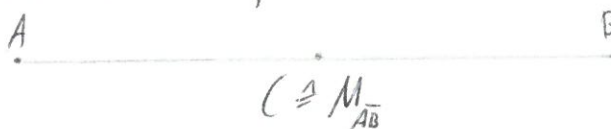
$$\text{Also: } \overline{AC} > \overline{BC} \Rightarrow k > 1 \Rightarrow \lambda < -1 \quad (\Rightarrow C \text{ Rechts von } B)$$

$$-1 < \lambda < 0 \quad (\Rightarrow C \text{ Links von } A)$$



(beliebiges C)

$$\Rightarrow c = \frac{a + \lambda b}{1 + \lambda} \quad (\Rightarrow \lambda \neq -1; \lambda \in \mathbb{R})$$

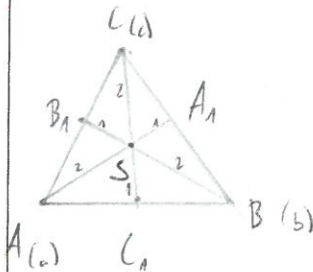
ist die Gleichung der Gerade $\overline{AB}$ So kann zum Beispiel der Mittelpunkt von $\overline{AB}$ ($M_{\overline{AB}}$) dargestellt werden.

$$\Rightarrow c = \frac{a + b}{2} \quad (\lambda = 1)$$

Datum: 19.6.2016

Chronist: Felix Schnerzinger

Berechnung des Schnittpunkts eines beliebigen Dreiecks:

Gegeben: a, b, c Gesucht: S

$$C_1 = \frac{a+b}{2}$$

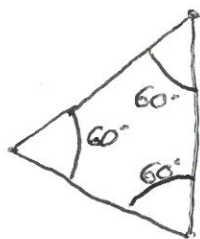
$$S = \frac{C + 2 \cdot C_1}{1+2} = \frac{C + 2 \cdot \left(\frac{a+b}{2}\right)}{3} = \frac{a+b+c}{3}$$

[$\lambda=2$, da die Winkelhalbierende(n) durch den Schnittpunkt
im Verhältnis 2:1 geteilt werden]

Nachdem die Mathe-Einheit abgeschlossen war, arbeiteten wir noch mit Surfer, um unsere angefangenen Körper fertigzustellen. Im Anschluss ans Mittagessen folgte die Zugfahrt nach Triberg.

Datum: 20.06.16

Chronist: Lisa McDowell

geg: $a; b$ ges: c • Rotation des Vektors ab und Hinzuzählen von a

$$c = (b-a) \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) + a$$

$$\cos \left(\frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{3} \right) = E \left(\frac{\pi}{3} \right)$$

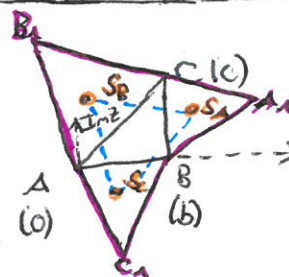
$$E(\alpha) = \cos \alpha + i \sin \alpha$$

$$c = a + (b-a) E \left(\frac{\pi}{3} \right) \quad | E(\alpha) =$$

$$|E(\alpha)|^2 = [\operatorname{Re} E(\alpha)]^2 + [\operatorname{Im} E(\alpha)]^2 = 1$$

 $z \rightarrow z E(\alpha)$ - Drehung um den Ursprung um α

$$\begin{aligned} E \left(\frac{\pi}{2} \right) &= i & E &: \\ E \left(\frac{\pi}{3} \right) &= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i & \frac{\pi}{3} & \\ E \left(\frac{\pi}{4} \right) &= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i & \frac{\pi}{4} & \\ E \left(-\frac{\pi}{2} \right) &= -i & -\frac{\pi}{2} & \end{aligned}$$

Napoleonische Dreieckegeg: ΔABC $\Delta A_1CB_1; \Delta B_1A_1C; \Delta C_1A_1B$ gleichseitig $S_1; S_2; S_3$ - SchwerpunkteGes: Bew $\Delta S_1S_2S_3$ gleichseitigLösungIm $b=0$ $b \in \mathbb{R}$; $b; c$ sind gegeben

$$c_1 = b \cdot E \left(-\frac{\pi}{3} \right); \quad b_1 = c \cdot E \left(\frac{\pi}{3} \right); \quad a_1 = (b-c) \cdot E \left(\frac{\pi}{3} \right) + c$$

$$\Delta S_1S_2S_3 \text{ gleichseitig} \Leftrightarrow s_1 = (s_2 - s_3) E \left(\frac{\pi}{3} \right) + s_3$$

$$s_1 = \frac{a_1 + b_1 + c_1}{3} = \frac{(b-c) E \left(\frac{\pi}{3} \right) + 2c + b}{3}$$

$$s_2 = \frac{c E \left(\frac{\pi}{3} \right) + c}{3}$$

$$s_3 = \frac{b + b E \left(-\frac{\pi}{3} \right)}{3}$$

Datum: 20.06.16

Chronist: Lisa Mcbowell

$$(S_A - S_C) E(-\frac{\pi}{3}) + S_C - S_A = 0$$

$$\frac{c E(\frac{\pi}{3}) + c - b - b E(-\frac{\pi}{3})}{3} E(-\frac{\pi}{3}) + \frac{b + b E(-\frac{\pi}{3}) - 2c - b - (b-c) E(\frac{\pi}{3})}{3} = 0$$

$$c E(\frac{\pi}{3}) E(-\frac{\pi}{3}) + (c-b) E(-\frac{\pi}{3}) - b E^2(-\frac{\pi}{3}) + b + b E(-\frac{\pi}{3}) - 2c - b - (b-c) E(\frac{\pi}{3}) =$$

$$= c - 2c + (c-b) [E(-\frac{\pi}{3}) + E(\frac{\pi}{3})] - b E(-\frac{2\pi}{3}) + b E(-\frac{\pi}{3})$$

$$= -c + (c-b) [E^*(\frac{\pi}{3}) + E(\frac{\pi}{3})] + b [E(-\frac{\pi}{3}) - E(-\frac{2\pi}{3})]$$

$$= -c + 2(c-b) \operatorname{Re} E(\frac{\pi}{3}) + 2b \operatorname{Re} E(-\frac{\pi}{3})$$

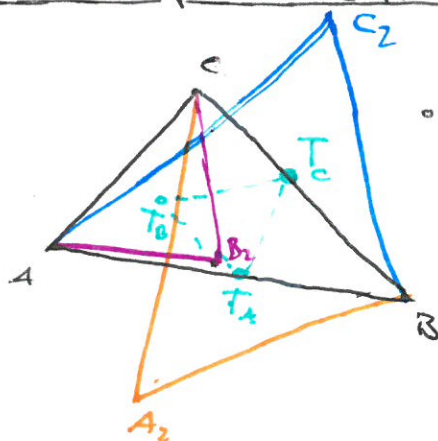
$$= -c + 2(c-b) \frac{1}{2} + 2b \frac{1}{2}$$

$$= -c + c - b + b = 0 \quad \checkmark$$



$\Delta S_A S_B S_C$ heißt äußeres Napoleonisches Dreieck.

Inneres Napoleonisches Dreieck



$\Delta T_A T_B T_C$ gleichseitig

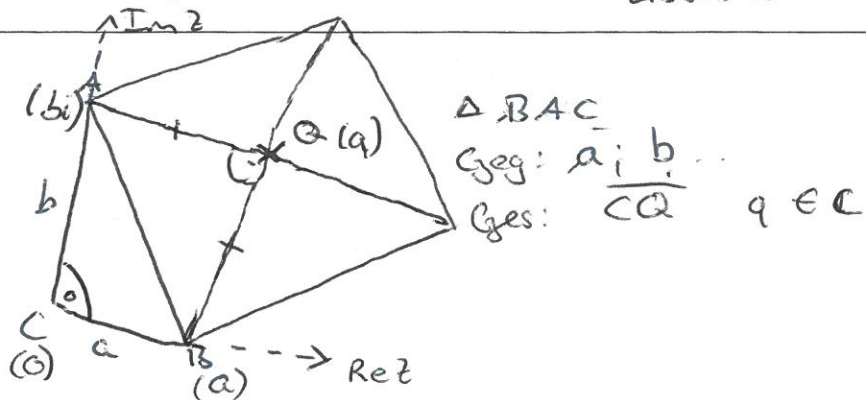
- Die gleichseitigen Dreiecke der Seiten werden tetet nach innen gebildet

Beweis analog zum äußeren Napoleonischen Dreieck

Satz: Die Schwerpunkte der Napoleonischen Dreiecke liegen aufeinander. Der Schwerpunkt des Ausgangsdreiecks liegt ebenfalls auf diesem Punkt.

Datum: 20.06.16

Chronist: Lisa McDowell



$$\overrightarrow{QA} \leftrightarrow bi - q$$

$$\overrightarrow{QB} \leftrightarrow a - q$$

$$\overrightarrow{QB} = i \overrightarrow{QA}$$

$$a - q = i(bi - q)$$

$$a - q = -b - iq$$

$$a + b = q(1 - i)$$

$$q = \frac{a+b}{1-i}$$

$$|q|^2 = \frac{a+b}{1-i} \cdot \frac{a+b}{1+i} = \frac{(a+b)^2}{1+1} = \frac{(a+b)^2}{2}$$

$$|q| = \frac{a+b}{\sqrt{2}} = CQ$$

$$\omega(0(z_0); R)$$

$$M(z) \quad M \in \omega \Leftrightarrow \overline{MO} = R$$

$$|z - z_0|^2 = R^2$$

$$(z - z_0)(z - z_0)^* = R^2$$

$$(z - z_0)(z^* - z_0^*) = R^2$$

$$\omega(0(0); 1) \quad zz^* = 1$$

Datum: 20.06.16

Chronist: Lisa McDowell

Parallelität

$$O(o) \quad A(a) \quad B(b)$$

↳ sollen auf einer Geraden liegen

$$\arg a - \arg b = 0$$

$$\arg a - \arg b = \pm \pi$$

$$\arg \frac{a}{b} \quad \frac{a}{b} \in \mathbb{R}$$

$$a \in \mathbb{C}$$

$$b \in \mathbb{C}$$

$$t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow t = t^*$$

$$\frac{a}{b} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{a^*}{b^*} = \frac{a}{b}$$

$$\boxed{|a^*b| = |ab^*|} \text{ Kolinearität}$$

$$A(a) ; B(b) ; C(c) ; D(d)$$

$$\{a; b; c; d\} \in \mathbb{C}$$

$$AB \parallel CD \Leftrightarrow$$

$$\frac{\overrightarrow{AB}}{b-a}$$

$$\frac{\overrightarrow{CD}}{d-c}$$

$$(b-a)^*(d-c) = (b-a)(d-c)^*$$

$$\boxed{(b^*-a^*)(d-c) = (b-a)(d^*-c^*)} \quad AB \parallel CD$$

$$\{A; B; C; D\} \in W \quad (O(o); R=1)$$

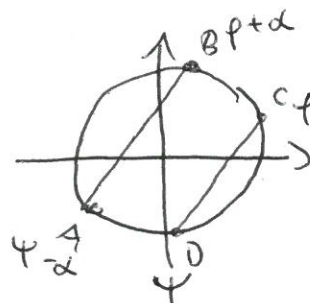
$$z z^* = 1$$

$$z^* = \frac{1}{z}$$

$$\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right)(d-c) = (b-a)\left(\frac{1}{d} - \frac{1}{c}\right)$$

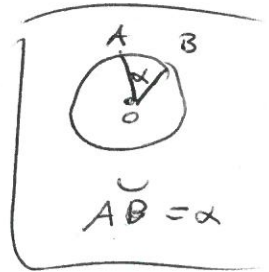
$$\frac{(a-b)(d-c)}{ab} = \frac{(b-a)(c-d)}{cd}$$

$$ab = cd$$



Datum: 20.06.16

Chronist: Lisa McDowell

 $\cup$
 $\overline{AB}$ $cd \quad p + q$ $ab \quad p + d + q - r = p - q$ Orthogonalität $\perp$ $OA \perp OB$ $O(o)$
 $A(a) \quad B(b)$

$$\arg a - \arg b = \pm \frac{\pi}{2}$$

$$\begin{cases} \arg \frac{a}{b} = \frac{\pi}{2} \\ \arg \frac{a}{b} = \frac{3\pi}{2} \end{cases} \quad \operatorname{Re} \frac{a}{b} = 0$$

$$\operatorname{Re} t = 0$$

$$t = -t^*$$

$$\frac{a}{b} = -\left(\frac{a}{b}\right)^*$$

$$\frac{a}{b} = \frac{a^*}{b^*}$$

$$\boxed{ab^* + a^*b = 0}$$

 $A(a) \quad B(b) \quad C(c) \quad D(d) \quad AB \perp CD?$

$$\overrightarrow{AB} \quad b-a \quad \overrightarrow{CD} \quad d-c$$

$$(b-a)(d-c)^* + (b-a)^*(d-c) = 0$$

$$\boxed{(b-a)(d^* - c^*) + (b^* - a^*)(d-c) = 0}$$

$$\{A; B; C; D\} \subset W(O(o); R=1)$$

$$a^* = \frac{1}{a} \quad b^* = \frac{1}{b} \quad c^* = \frac{1}{c} \quad d^* = \frac{1}{d}$$

Datum: 20.06.15

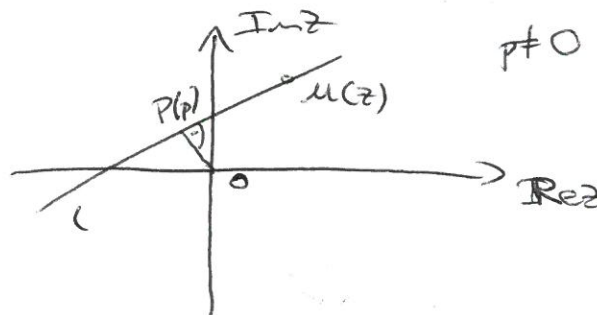
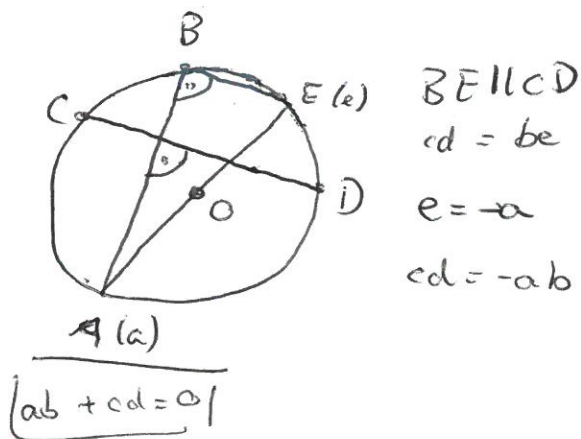
Chronist: Lisa McDowell

$$(b-a) \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{c} \right) + \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right) (d-c) = 0$$

$$\frac{(b-a)(c-d)}{dc} + \frac{(a-b)(d-c)}{ab} = 0$$

$$\frac{1}{cd} + \frac{1}{ab} = 0 \quad | \cdot abcd$$

$$\boxed{ab + cd = 0}$$



$$M \in L \Leftrightarrow \overrightarrow{PM} \perp \overrightarrow{OP}$$

$$\overrightarrow{PM} = z - p \quad \overrightarrow{OP} = p$$

$$M \in L \Leftrightarrow (z-p)p^* + (z^*-p^*)p = 0$$

$$zp^* - pp^* + z^*p - p^*p = 0$$

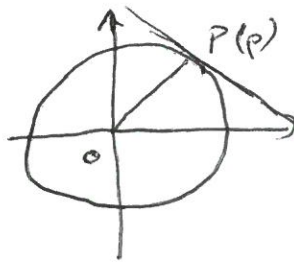
$$\boxed{zp^* + z^*p = 2pp^*} \quad p \neq 0$$

Datum: 20.06.16

Chronist: Lisa McDowell

$$P(p) \in \omega(0|0); R=1 \quad p p^* = 1$$

$$\boxed{z p^* + z^* p = 2}$$



$$AB \parallel CD \Leftrightarrow \frac{a-b}{a^*-b^*} = \frac{c-d}{c^*-d^*}$$

$$A, B, C \in l \Leftrightarrow AB \parallel AC \Leftrightarrow \frac{a-b}{a^*-b^*} = \frac{a-c}{a^*-c^*}$$

$$\cancel{aa^*} - ac^* - ba^* + bc^* - \cancel{aa^*} + a^*c + b^*a - b^*c = 0$$

$$a(b^* - c^*) + b(c^* - a^*) + c(a^* - b^*) = 0$$

$$A, B, z \in l \Leftrightarrow a(b^* - z^*) + b(z^* - a^*) + c(a^* - b^*) = 0$$

→ Gleichung einer Geraden, die durch zwei Punkte A und B läuft. z ist beliebig

$$\omega: z \cdot z^* = 1$$

$$A \in \omega \Leftrightarrow a^* = \frac{1}{a}; B \in \omega \Leftrightarrow b^* = \frac{1}{b}$$

$$a\left(\frac{1}{b} - z^*\right) + b\left(z^* - \frac{1}{a}\right) + z\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) = 0$$

$$\frac{a}{b} - az^* + bz^* - \frac{b}{a} + \frac{z}{a} - \frac{z}{b} = 0$$

$$\frac{a^2 - a^2bz^* + ab^2z^* - b^2 + zb - za}{ab} = 0$$

$$(a-b)(a+b) - abz^*(a-b) - z(a-b) = 0$$

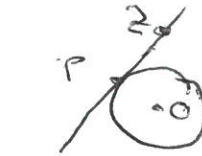
$$\boxed{a+b - abz^* - z = 0} \rightarrow \text{Gleichung einer Geraden, deren Punkte A und B auf dem Einheitskreis liegen}$$

Datum: 20.06.16

Chronist: Lisa McDowell

$$OA \perp OB \Leftrightarrow ab^* + a^*b = 0$$

$$PZ: pz^* + p^*z = 2$$

Lemma 1

$$AB: a+b - abz^* - z = 0$$

$$CD: c+d - cdz^* - z = 0$$

$$\begin{cases} a+b - abz^* - z = 0 \\ c+d - cdz^* - z = 0 \end{cases}$$

$$a+b - (c+d) - (ab-cd)z^* = 0$$

$$z_0^* = z^* = \frac{a+b - (c+d)}{ab-cd} \quad \omega: z \cdot z^* = 1$$

$$a - a^* = 1$$

...

$$z_0 = \frac{a^* + b^* - (c^* + d^*)}{a^*b^* - c^*d^*}$$

$$a^* = \frac{1}{a}$$

...

$$z_0 = \frac{ab - cd}{a+b - (c+d)}$$

$$z_0 = f(a, b, c, d) ?$$

Lemma 2

$$\omega: z \cdot z^* = 1$$

$$\left[z_1 = \frac{zab}{a+b} \right] ?$$

