Chronik

des

3. LGH - MATHE - SPRACH – AUSTAUSCHES

zwischen dem Lyceum „Naukova Zmina“ (Kiew, die Ukraine)

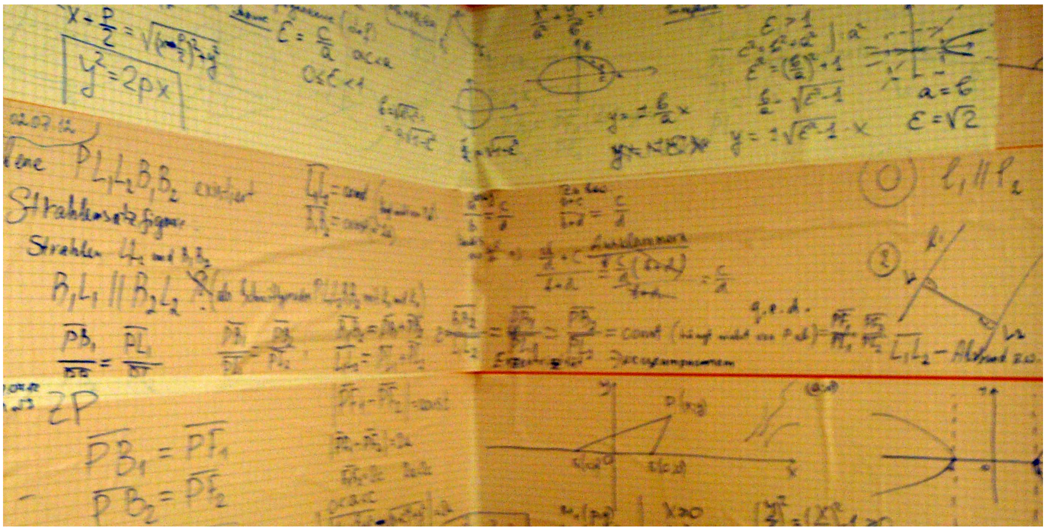
und

dem Landesgymnasium für Hochbegabte (Schwäbisch Gmünd, Deutschland)

"Kegelschnitte" und "Knobelaufgaben"

Unsere Lehrer und Dolmetscher

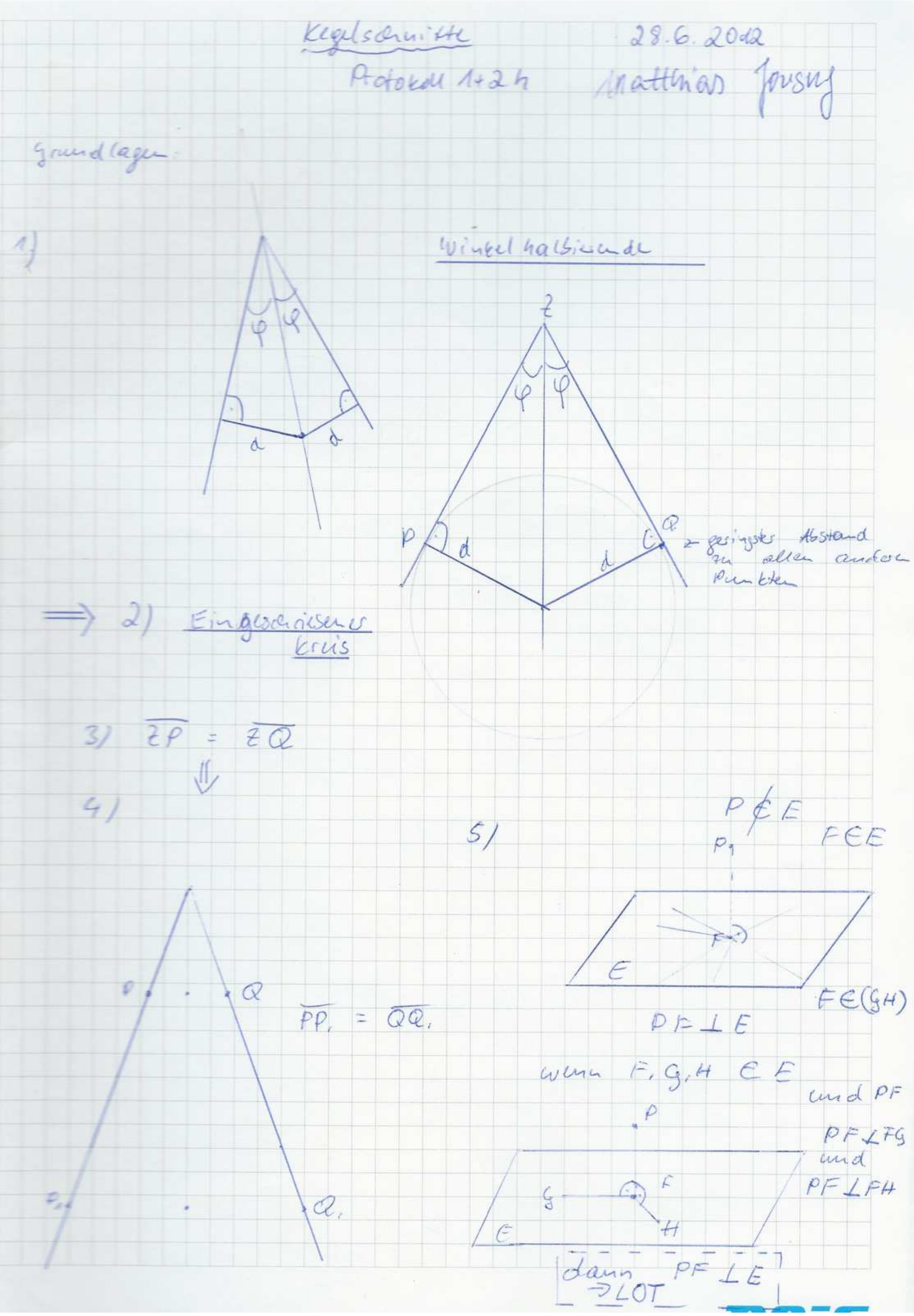
Dr. Olga Lomonosova	Igor Goldshtein
Dr. Albert Oganian	Oleksandr Biedov
Dr. Tatiana Samrowski	Aleksej Karlüchenko



27.06. - 09.07.2012 - Aufenthalt der ukrainischen Gruppe in Deutschland

15. - 22.10.2012 - Aufenthalt der deutschen Gruppe in der Ukraine

Sommer 2012 in Deutschland



Kegelschnitte 28.6.2012

Protokoll 1+2 h Matthias Jousny

Grundlagen:

1) Winkelhalbierende

φ φ d d

Z

φ φ

P d d Q ← geringster Abstand zu allen andere Punkten

⟹ 2) Eingeschriebener Kreis

3) $\overline{ZP} = \overline{ZQ}$

⇓

4)

P Q

P_1 Q_1

$\overline{PP_1} = \overline{QQ_1}$

5)

$P \notin E$

P_1

$F \in E$

F E

$F \in (GH)$

$PF \perp E$

wenn $F, G, H \in E$ und PF

$PF \perp FG$ und $PF \perp FH$

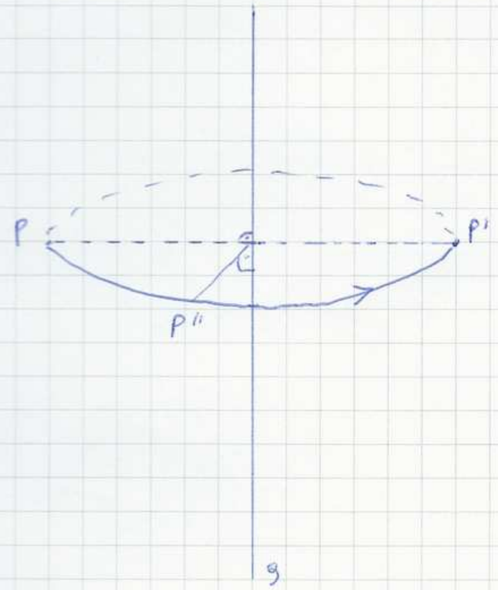
P

G F H E

dann $PF \perp E$

⇒ LOT

6)

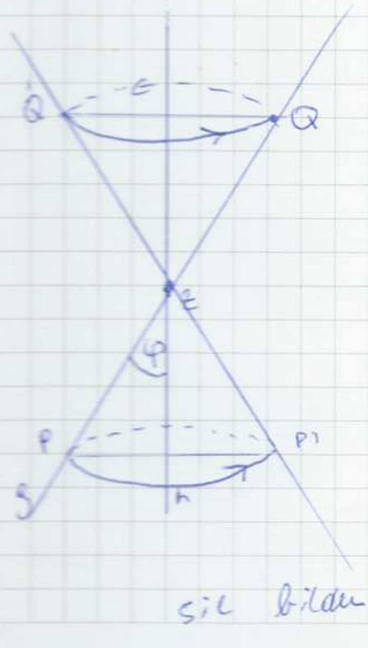


$P \in g$

Hauptteil

gerader Kegel

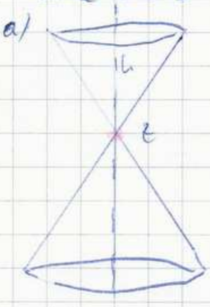
Mögliche Schnittebenen



1)a) $h \in E$

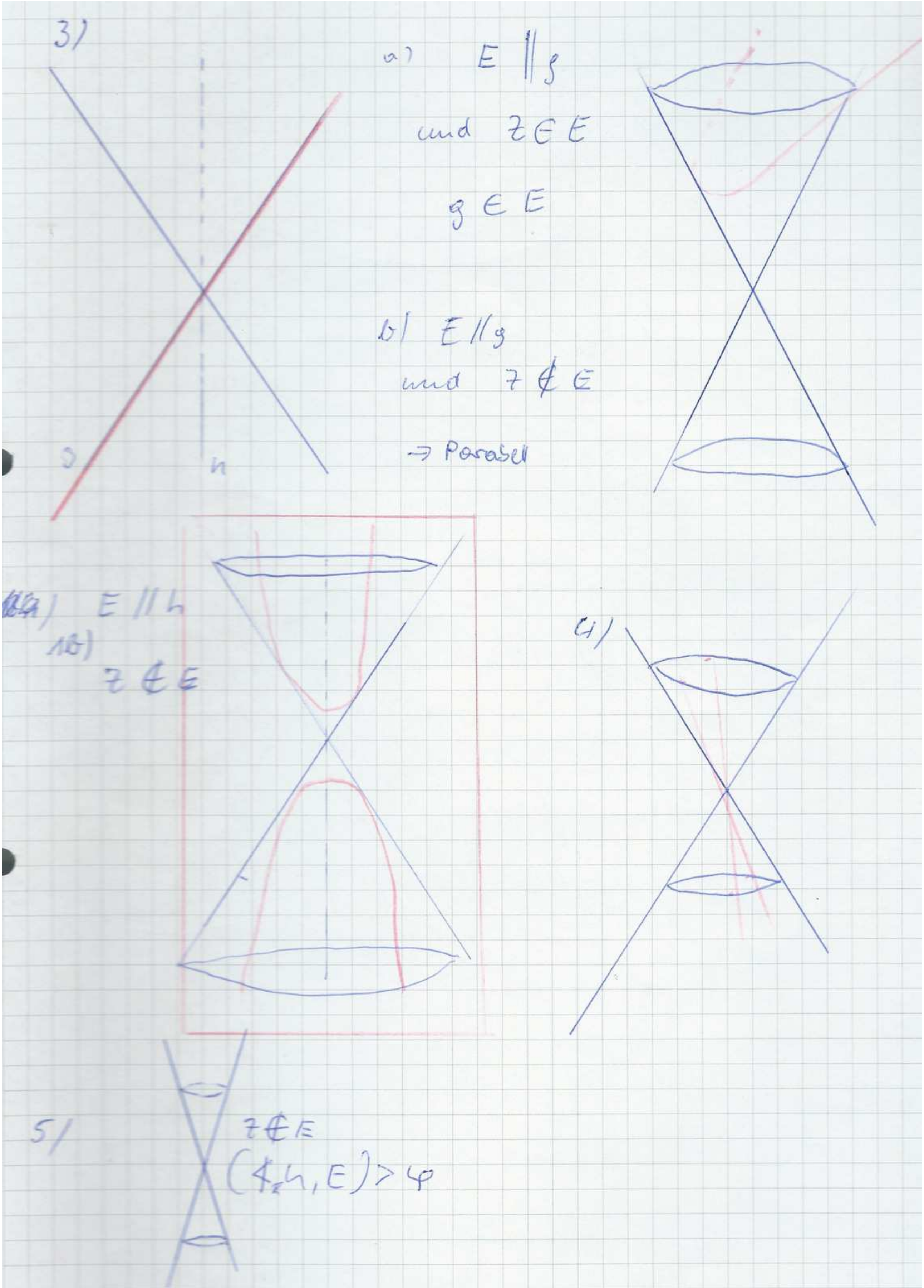
2) $h \perp E$ und $Z \in E$

a)



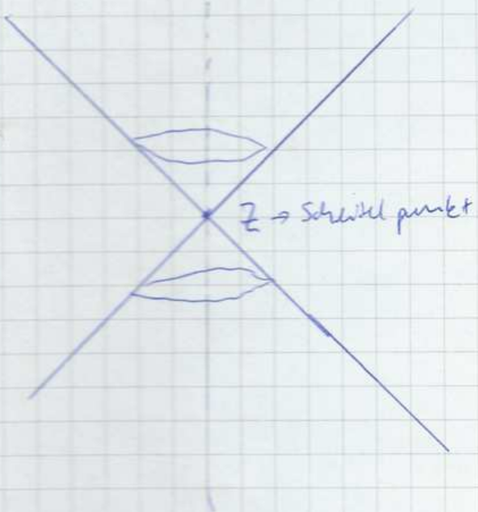
b) $h \perp E$ $Z \notin E$

sie bilden eine Fläche die gerader Doppelkegel heißt


3)
a) E ∥ g
und Z ∈ E
g ∈ E
b) E ∥ g
und Z ∉ E
→ Parabel
s
h
4a) E ∥ h
4b)
Z ∉ E
4)
5)
Z ∉ E
(∢ h, E) > φ

28.6.2012

Wiederholung



I Alle möglichen Fälle

„Overheadfolie“

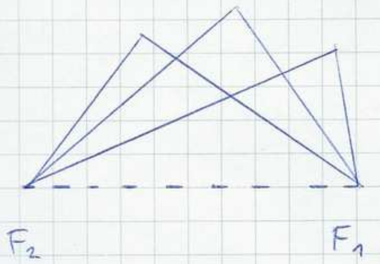
I Punkte → Kugeln berühren Ebene

PF_1 und PB_1 = 2 Tangenten

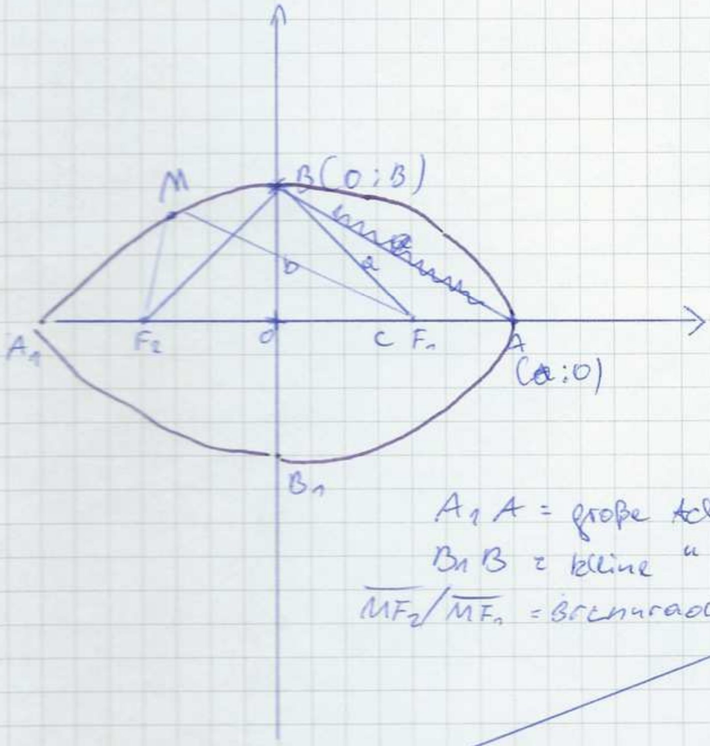
$$
\begin{array}{rl}
 & PB_1 = PF_1 \\
+ & PB_2 = PF_2 \\
\hline
 & B_1B_2 = PF_1 + PF_2
\end{array}
$$

Die Summe von Entfernungen von beliebigen Kurvenpunkten zu festen Punkten $F_1 + F_2$ ist konstant

Ellipse



$F_2 + F_1$ = Brennpunkte



M = beliebiger Punkt

$\overline{MF_1} + \overline{MF_2} = 2a$

$\overline{F_1F_2} = 2c$

$F_1(c;0)$ $F_2(-c;0)$

$M(x;y)$

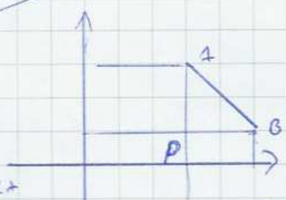
$A(x_1;y_1)$ $B(x_2;y_2)$

A_1A = große Achse Ellipse

B_1B = kleine " "

$\overline{MF_2}/\overline{MF_1}$ = Brennradien

$AB = \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$



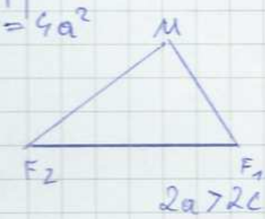
Pythagoras Satz

$x^2-2cx+c^2+y^2+x^2+2cx$
$+c^2+y^2$

$+2\sqrt{(x^2+c^2+y^2)-(2cx)^2}=4a^2$

$=(x^2-2cx+c^2+y^2)(x^2+2cx+c^2+y^2)$

$=(x^2+c^2+y^2)^2-(2cx)^2$



$2a>2c$

$\boxed{a>c}$

$$\sqrt{(x^2+c^2+y^2)^2 - 4c^2x^2} = 2a^2 - x^2 - y^2 - c^2$$

$$x^4+c^4+y^4+2x^2c^2+2x^2y^2+2c^2y^2-4c^2x^2=$$

$$4a^4+x^4+y^4+c^4-4a^2x^2-4a^2y^2$$

$$-4a^2y^2-4a^2c^2+2x^2y^2+2x^2c^2+2y^2c^2$$

$$\boxed{(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc}$$

gekürzt:

$$x^2(4a^2-4c^2)+y^2\cdot 4a^2=4a^2(a^2-c^2)$$

$$\boxed{a^2-c^2=b^2}$$

$$x^2\cdot b^2+y^2\cdot a^2=a^2b^2 \quad \Big| : a^2b^2$$

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad a^2-c^2=b^2}$$

$M_1(x_1;y_1)$ $M_2(-x_1;y_1)$ $x \geq 0$

$y \geq 0$

$M_3(x_1;-y_1)$

$M_4(-x_1;-y_1)$ $\frac{x^2}{a^2} \leq 1$

$x \leq a$

$y \leq b$ $A(a;0$

$B(0;b)$

wenn $c = 0$

$b = a$

$x^2 + y^2 = a^2$

Kreis

Kreis Sonderfall einer Ellipse wenn beide Brennpunkte gleich sind.

Ü:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

$A(5;0)$ $A_1(-5;0)$

$B(0;3)$ $B_1(0;-3)$

$$\boxed{c^2 = a^2 - b^2}$$

$F_1(4;0)$ $F_2(-4;0)$

$$\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{100} = 1$$

$c^2 = a^2 - b^2$

$A(8;0)$ $F_1(6;0)$

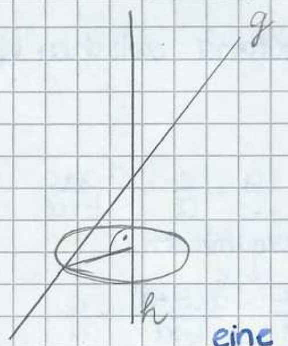
$B(0;10)$ $F_2(-6;0)$

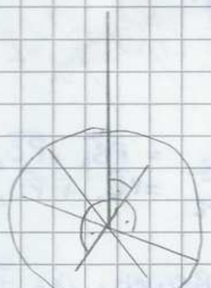
2. Juli 2012

3. Vorlesung

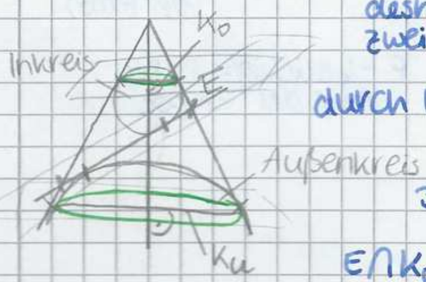
Frau Lomonosova / Herr Oganian

Ellipsen : Ortskurve aller Punkte, deren Summe der Abstände immer konstant ist.





eine Gerade ist orthogonal zu der Ebene, wenn sie zu allen Geraden auf der Ebene orthogonal ist. → kann man nicht alle überprüfen, deshalb reicht als Beweis ⊥ zu zwei nichtparallelen



durch Rotation entstehen zwei Kugeln → Dandelinische Kugeln

3 Ebenen: $E; K_o; K_u$

$E \cap K_o = l_1$

$E \cap K_u = l_2$

$B_1 \in$ obere Kugel; K_o $\quad \overline{PB_1} = \overline{PF_1}$ (als Tangente)

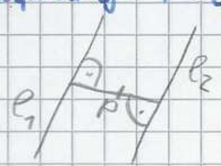
$B_2 \in$ untere Kugel; K_u $\quad \overline{PB_2} = \overline{PF_2}$

Abstand P, l_1 : $PL_1 \perp l_1$ $\quad \overline{PL_1}$ – Abstand von P zu l_1

$PL_2 \perp l_2$ $\quad \overline{PL_1}$ – Abstand von P zu l_2

$l_1 \parallel l_2$

1. Behauptung: $P \in L_1L_2$



Ebene $PL_1L_2B_1B_2$ existiert

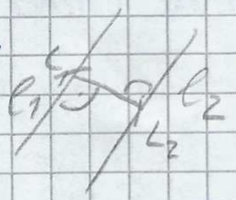
Strahlensatzfigur: Strahlen L_1L_2 und B_1B_2

Behauptung: $B_1L_1 \parallel B_2L_2$
folgt aus Existenz der Ebene $PL_1L_2B_1B_2$ als Schnittgerade mit K_o und K_u

$$\frac{\overline{PB_1}}{\overline{PB_2}} = \frac{\overline{PL_1}}{\overline{PL_2}} \Leftrightarrow \frac{\overline{PB_1}}{\overline{PL_1}} = \frac{\overline{PB_2}}{\overline{PL_2}}$$

$\overline{L_1L_2}$ = konstant
$\overline{B_1B_2}$ = konstant (= 2a)
} konstant = hängt nicht von P ab)

2. Behauptung:



$\overline{L_1L_2}$ - Abstand zwischen l_1 und l_2

$$\frac{\overline{B_1B_2}}{\overline{L_1L_2}} = \frac{\overline{PB_1}+\overline{PB_2}}{\overline{PL_1}+\overline{PL_2}}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \qquad \frac{a+c}{b+d} = \frac{c}{d}$$

ausklammern

Beweis: $a = \frac{cb}{d} \Rightarrow \frac{\frac{cb}{d}+c}{b+d} = \frac{\frac{c}{d}(b+d)}{b+d} = \frac{c}{d}$ q.e.d.

$$\varepsilon = \frac{\overline{B_1B_2}}{\overline{L_1L_1}} = \frac{\overline{PB_1}}{\overline{PL_1}} = \frac{\overline{PB_2}}{\overline{PL_2}} = \text{konstant (hängt nicht von P ab)}$$

$$\varepsilon = \frac{\overline{PF_1}}{\overline{PL_1}} = \frac{\overline{PF_2}}{\overline{PL_2}}$$

P - beliebiger Punkt auf der Ellipse

$\downarrow$

Exzentrizität

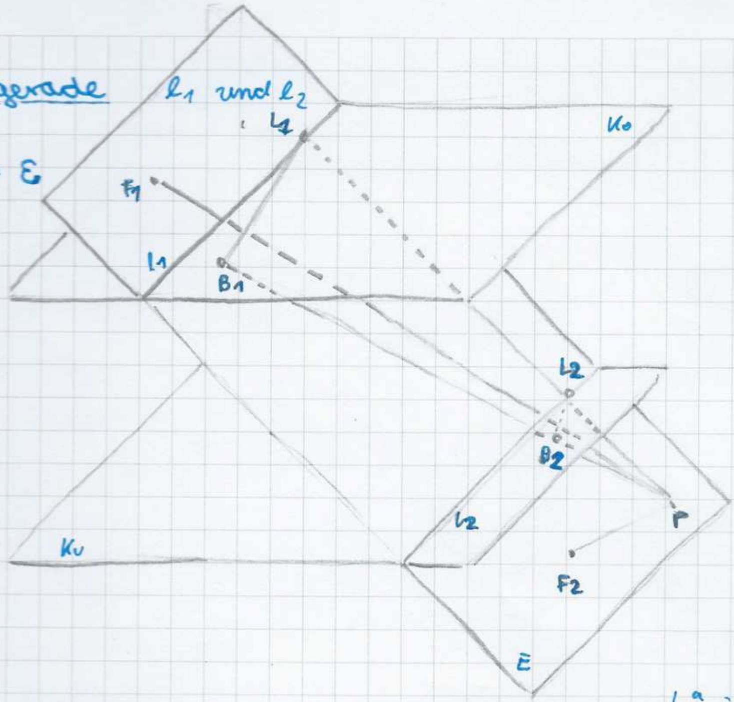
Mathe Sommer Akademie Stunde 3

Camil Herr Oganian / Frau Lomonosova

1 Juli 2012

Leitgerade

$$\frac{\overline{PF_1}}{\overline{PL_1}} = \varepsilon$$



Hyperbel: $|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}| = \overline{B_1B_2}$

$K_o \parallel K_v \perp h$

$\overline{L_1L_2} = d(l_1, l_2)$

$L_1B_1 \parallel L_2B_2$

$\Delta PL_2B_2 \sim \Delta PL_1B_1$

$$\frac{\overline{PB_1}}{\overline{PL_1}} = \frac{\overline{PB_2}}{\overline{PL_2}} = \frac{\overline{B_1B_2}}{\overline{L_1L_2}}$$

= Constante unabhängig von P

$$\left(\frac{a}{b} = \frac{c}{d}\right) = \frac{a-c}{b-d}$$

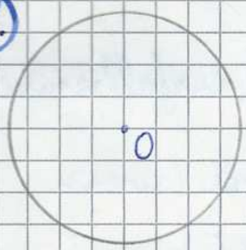
$$\frac{\overline{PF_1}}{\overline{PL_1}} = \frac{\overline{PF_2}}{\overline{PL_1}} = \frac{\overline{B_1B_2}}{\overline{L_1L_2}} = \varepsilon$$

ε – Exzentrizität der Hyperbel

Sowohl eine Elipse als auch eine Hyperbel besitzen die Eigenschaft, dass das Verhältnis der Abstände von jedem beliebigen Punkt zu einem festen Punkt (Brennpunkt) und zu einer festen entsprechenden Gerade genannt Leitgerade konstant bleibt

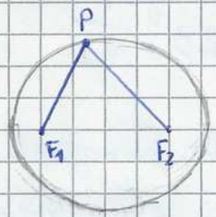
Kegelschnitte des 2. Grades

03.07.2012

1. 

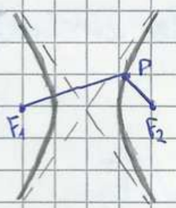
Kreis

Ortskurve, deren Punkte alle gleich weit von einem Punkt (=O) entfernt sind

2. 

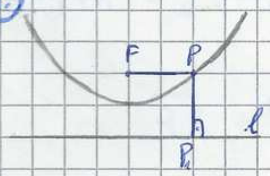
Ellipse

$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = const$

3. 

Hyperbel

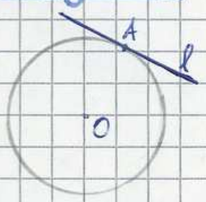
$\overline{PF_1} - \overline{PF_2} = const$

4. 

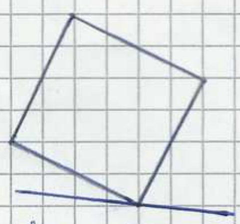
Parabel

$\overline{PF} = \overline{PP_1}$

Tangente

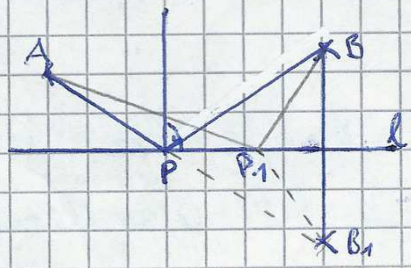


Die Stützende Gerade hat mit der Kurve nur 1 gemeinsamen Punkt. Eine Tangente ist eine Gerade als Grenzlage einer Sekante. Jede kleine Bewegung der Tangente verursacht einen neuen Schnittpunkt, der in der näheren Umgebung des ursprünglichen Schnittpunktes liegt.



keine Tangente!

Optische Eigenschaften eines Kegelschnitts

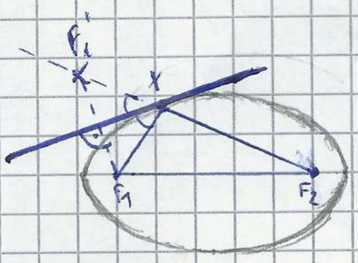


Lichtstrahl

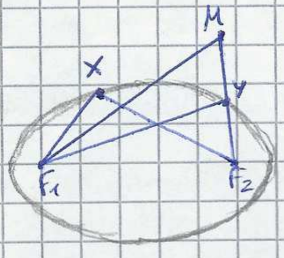
Einfallswinkel = Ausfallswinkel

$\overline{AP}+\overline{PB}$ - minimal (wenn P auf AB_1 liegt)

$\overline{AP_1}+\overline{P_1B} > \overline{AP}+\overline{PB}$

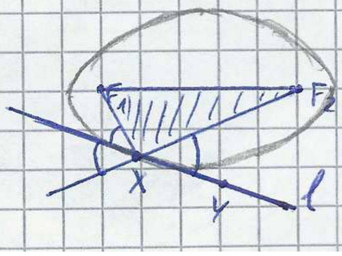


Beweise, dass die Tangente in Punkt x die Winkelhalbierende des Außenwinkels des Dreiecks ist.



$\overline{XF_1}+\overline{XF_2} < \overline{MF_1}+\overline{MF_2}$

$\overline{F_1M}+\overline{MY}+\overline{YF_2} > \overline{F_1Y}+\overline{YF_2} = \overline{XF_1}+\overline{XF_2}$

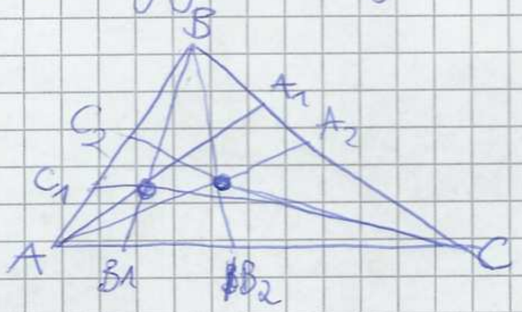


$\overline{YF_1}+\overline{YF_2} > \overline{XF'}+\overline{XF_2}$

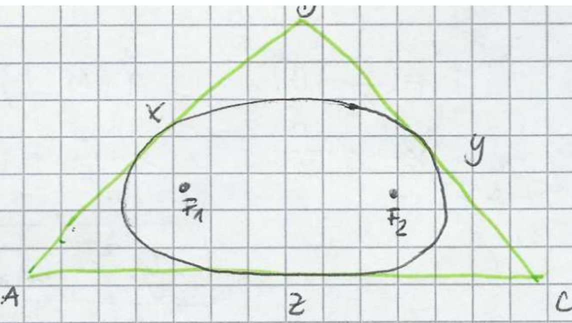
SATZ:

Sei $\overline{xy}$ eine Sehne mit F_1 auf $\overline{xy}$; seien $\overline{Py}$ und $\overline{Px}$ die Tangenten zur Ellipse.
Dann ist Punkt P (Schnittpunkt der Tangenten) ~~der~~ ~~Ellipse~~ Mittelpunkt des Dreiecks ΔyxF_2.
Außerdem gilt, dass PF_1 die Höhe des Dreiecks ΔPxy ist.

In einem Dreieck ΔABC nennen wir Ecktransversale, was die Eckpunkte des Dreiecks mit einem beliebigen Punkt auf der gegenüberliegenden Seite verbindet.

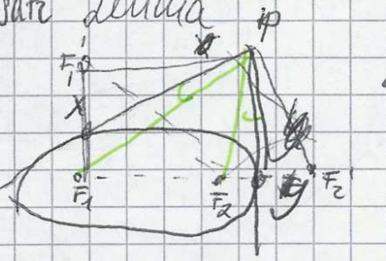


BB_2 ist die Spiegelung der Ecktransversalen, an der entspr. Winkelhalbierenden.
Wir haben 3 Ecktransversalen, die sich in einem Punkt schneiden. Spiegeln sich alle diese Ecktransv. an den jew. Winkelhalbierenden, so schneiden sie sich ebenfalls in einem Punkt.



Sei eine Ellipse m. F_1 & F_2 gegeben und sei ABC ein belieb. Dreieck, dem diese Ellipse eingeschrieben ist. Dann sind F_1 & F_2 konjugiert

~~Hilfssatz~~ Lemma

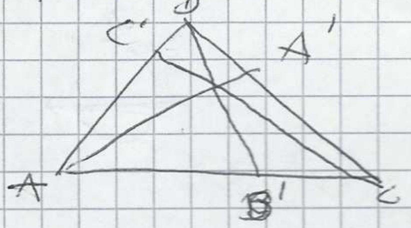


$$\angle PF_1X = \angle PF_2y$$

$$\Delta F_1PF_2' = \Delta F_2PF_1'$$

$$\overline{F_1F_2'} = \overline{F_2F_1'}$$

TYEBH



$$AA_1 \cap CC_1 \cap BB_1 = O$$

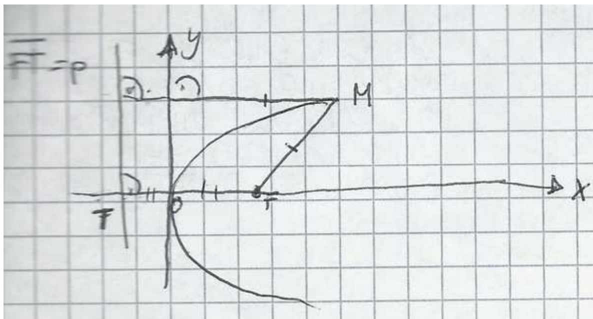
$$\Leftrightarrow \frac{\overline{AC_1}}{\overline{C_1B}} \cdot \frac{\overline{BA_1}}{\overline{A_1C}} \cdot \frac{\overline{CB_1}}{\overline{B_1A}} = 1$$

$$\Updownarrow$$

Teo...

$$\frac{\sin\angle ACC_1}{\sin\angle C_1CB} \cdot \frac{\sin\angle BAA_1}{\sin\angle CAA_1} \cdot \frac{\sin\angle BB_2}{\sin A} = 1$$

Alle Punkte, aus denen die Ellipse im rechten Winkel zu sehen ist, liegen auf einem Kreis mit dem Mittelpunkt in der Mitte der Ellipse



$F(\frac{p}{2};0)$

$x=-\frac{p}{2}$

$d(M;l)=MF$

$x+\frac{p}{2}=\sqrt{(x-\frac{p}{2})^2+y^2}$

$\boxed{y^2=2px}$

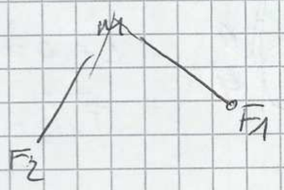
$M_0(t|q)$

$M_1(t|-q)$

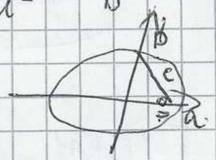
$\varepsilon=\frac{c}{a}$

$F_1F_2=2c$

$MF_1+MF_2=2a$



$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$



$0\le c\le a$

$0\le\varepsilon<1$

$b=\sqrt{a^2-c^2}=a\sqrt{1-\varepsilon^2}$

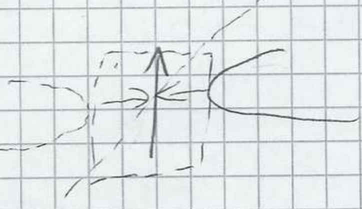
$\frac{b}{a}=\sqrt{1-\varepsilon^2}$

$\varepsilon=\frac{c}{a}$ $c>a$

$\varepsilon>1$

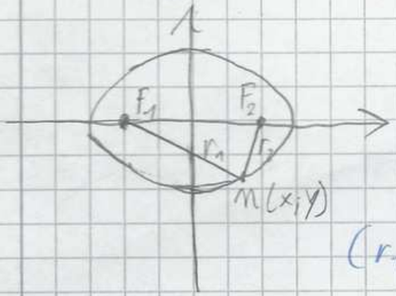
$c^2=b^2+a^2 \mid :a^2$

$\varepsilon^2=(\frac{b}{a})^2+1$



$y=\pm\sqrt{\varepsilon^2-1}\cdot x$ $\varepsilon=\sqrt{2}$

3.7.12 **Ellipse**



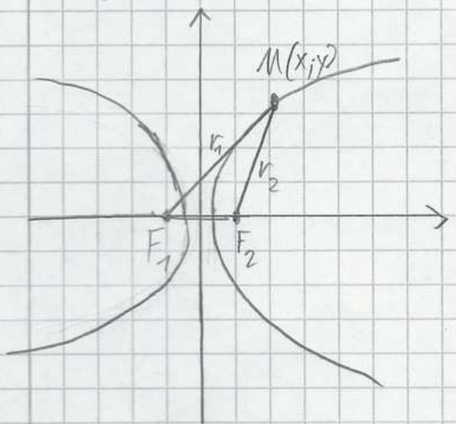
$$r_1^2 = (x+c)^2 + y^2 = x^2 + 2cx + c^2 + y^2$$
$$r_2^2 = (x-c)^2 + y^2 = x^2 - 2cx + c^2 + y^2$$
$$r_1^2 - r_2^2 = 4cx$$
$$(r_1 - r_2)(r_1 + r_2) = 4cx$$

$F_1(-c;0)$

$F_2(c;0)$

$$r_1 - r_2 = 2\frac{c}{a}x = 2\varepsilon x$$
$$r_1 + r_2 = 2a$$
$$2r_1 = 2(a + \varepsilon x) \Rightarrow r_1 = a + \varepsilon x$$
$$2r_2 = 2(a - \varepsilon x) \Rightarrow r_2 = a - \varepsilon x$$

Hyperbel



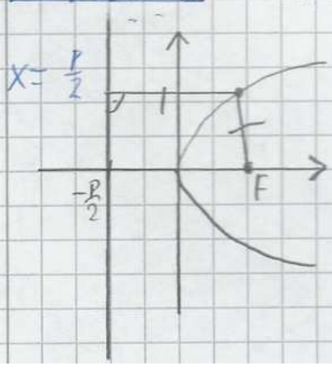
$$(r_1 - r_2)(r_1 + r_2) = 4cx$$

I $x > 0$

$$\begin{cases} r_1 - r_2 = 2a \\ r_1 + r_2 = 2\frac{c}{a}x = 2\varepsilon x \end{cases}$$
$$\begin{cases} 2r_1 = 2(a + \varepsilon x) \\ 2r_2 = 2(\varepsilon x - a) \end{cases}$$
$$\begin{cases} r_1 = a + \varepsilon x \\ r_2 = \varepsilon x - a \end{cases}$$

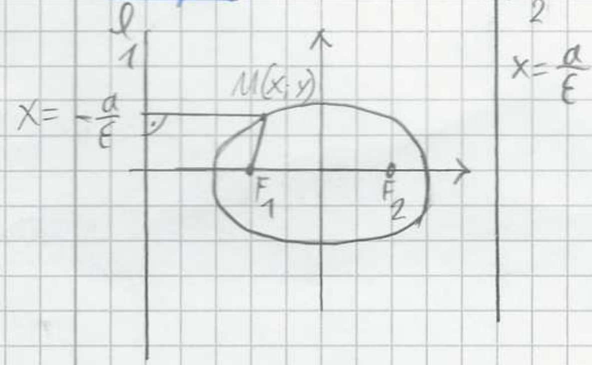
II $x < 0$

Parabel



$$\boxed{r = x + \frac{p}{2}}$$

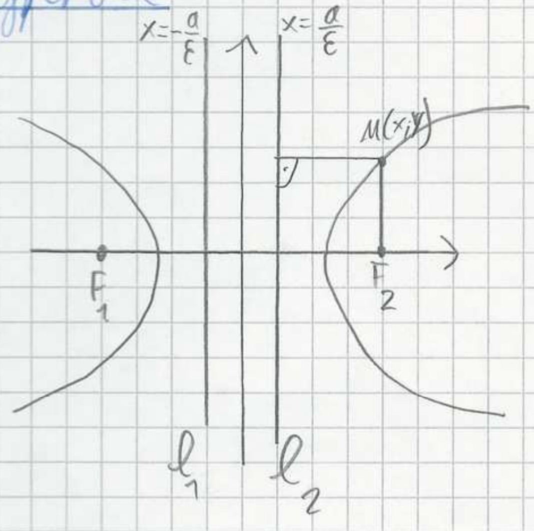
Ellipse



$0 < \varepsilon < 1$

$\frac{a}{\varepsilon} > a$

Hyperbel



$\varepsilon > 1$

$0 < \frac{a}{\varepsilon} < a$

Theorem

$$\frac{MF_1}{d(M;\ell_1)} = \varepsilon$$

Beweis:

Ellipse

$r_1 = a + \varepsilon x$

$d(M;\ell_1) = x + \frac{a}{\varepsilon}$

$r_2 = a - \varepsilon x$

$d(M;\ell_2) = \frac{a}{\varepsilon} - x$

$$\frac{r_1}{d(M;\ell_1)} = \frac{a+\varepsilon x}{x+\frac{a}{\varepsilon}} = \varepsilon \qquad \frac{r_2}{d(M;\ell_2)} = \frac{a-\varepsilon x}{\frac{a}{\varepsilon}-x} = \varepsilon$$

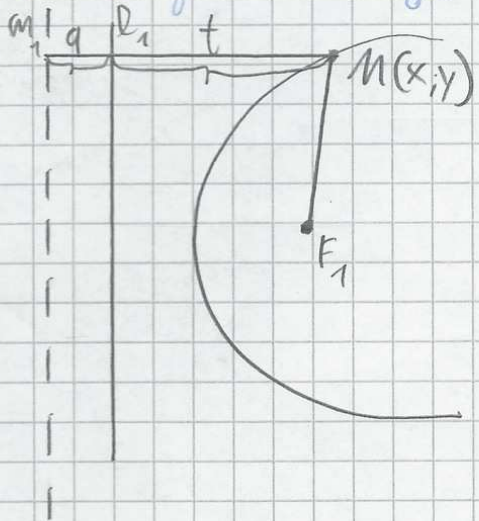
Hyperbel

$$\frac{r_1}{d(M;l_1)} = \frac{a+\varepsilon x}{\frac{a}{\varepsilon}-x} = \varepsilon \qquad \frac{r_2}{d(M;l_2)} = \frac{\varepsilon x - a}{x-\frac{a}{\varepsilon}} = \varepsilon$$

Parabel

$$\frac{MF_1}{d(M;l_1)} \Rightarrow \underline{\underline{\varepsilon = 1}} \Leftarrow MF_1 = d(M;l_1)$$

Verallgemeinerung:



$$\frac{MF_1}{d(M;l_1)} = const$$

$$\frac{MF_1}{d(M;m_1)} = const$$

$$\frac{d(M;m_1)}{d(M;l_1)} = const$$

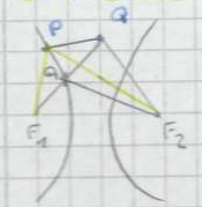
$$\frac{t+a}{t} = const \Rightarrow 1 + \frac{a}{t} = const \Rightarrow \frac{a}{t} = const$$

$\Rightarrow$ $\underline{\underline{a = 0}}$ $\Rightarrow$ m_1 und l_1 beschreiben dieselbe Gerade

Mathe 11 04.04

Optische Eigenschaften der Kegelschnitte - Teil II

Hyperbel



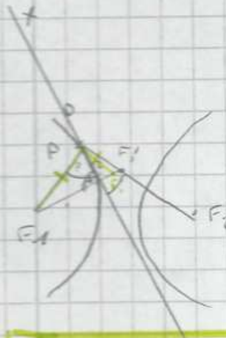
$\overline{PF_2} - \overline{PF_1} = \text{const}$

$\overline{QF_2} - \overline{QF_1} < \overline{PF_2} - \overline{PF_1}$

$\overline{Q_1F_2} - \overline{Q_1F_1} = \overline{PF_2} - \overline{PF_1}$

$\overline{QF_1} < \overline{Q_1F_2} + \overline{Q_1Q} \qquad | - \overline{QF_1}$

$\overline{QF_2} - \overline{QF_1} < \overline{Q_1F_2} + \overline{Q_1Q} - \overline{QF_1} = \overline{Q_1F_2} - \overline{Q_1F_1} = \overline{PF_2} - \overline{PF_1}$



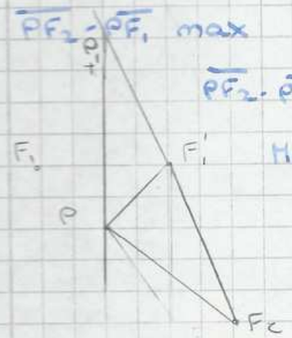
$F_1' \in \overline{PF_2}$!

$\overline{PF_2} - \overline{PF_1} = \overline{PF_2} - \overline{PF_1''}$

$\overline{F_1''F_2} + \overline{F_1''P} > \overline{PF_2}$

=> t = Winkelhalbierende Innenwinkel ΔF_1PF_2

$\overline{PF_2} - \overline{PF_1}$ max



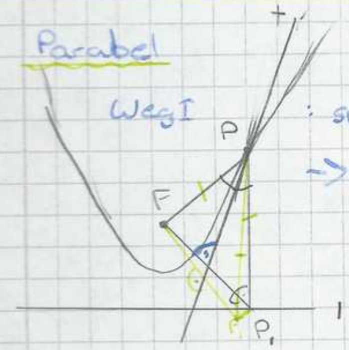
$\overline{PF_2} - \overline{PF_1} = \overline{PF_2} - \overline{PF_1'} \leq \overline{F_2F_1'}$

Max. bei Gerade P, F_1', F_2

q.e.d.

Parabel

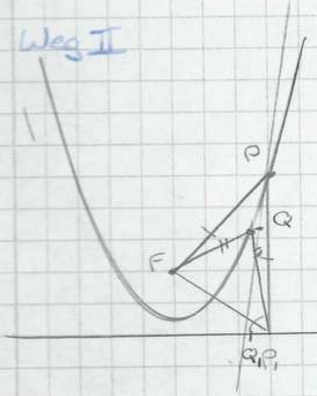
Weg I



: spiegeln von $\overline{FP}$ beweis, F, P_1 selber Punkt

-> gescheitert

Weg II



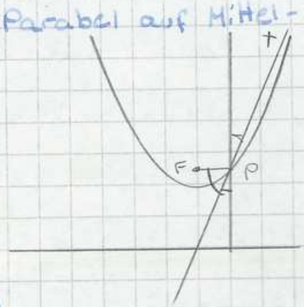
Q = 2. Schnittpunkt mit Parabel auf Mittelsenkrechte FP_1

Q_1 = Lotfußpunkt Q

$QQ_1 \perp l$

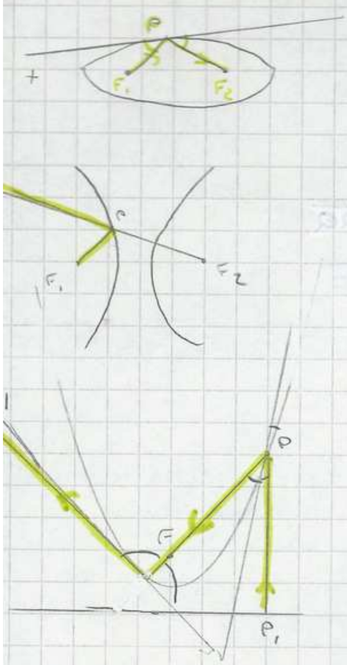
$\overline{FQ} = \overline{QP_1}$ $\quad \overline{FQ} = \overline{QQ_1}$

$\overline{QP_1} = \overline{QQ_1}$ $\quad \overline{QP_1} > \overline{QQ_1}$



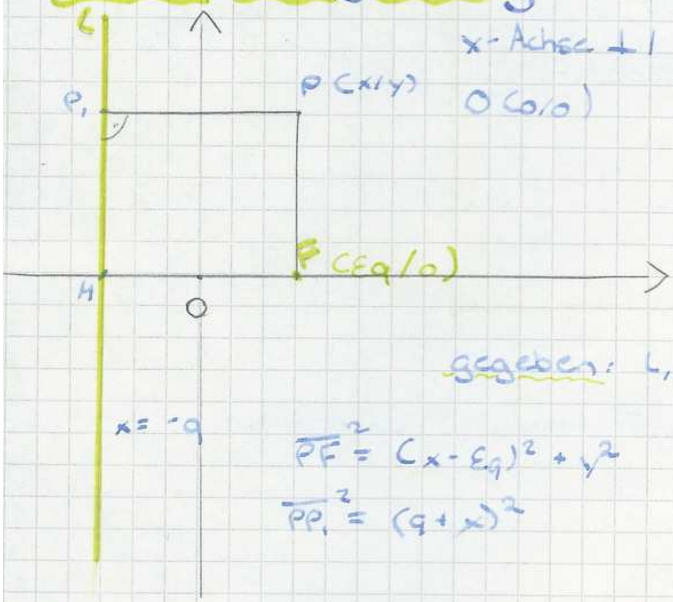
=> Tangente ist Winkelhalbierende

Licht: Einfallswinkel = Ausfallswinkel



Scheitelpunktgleichung

Mathe 12



x-Achse ⊥ l

O(0/0)

F ∈ x-Achse

$\overline{MO} : \overline{OF} = 1 : \varepsilon$

$P \in$ Kegelschnitt $\Leftrightarrow \boxed{\frac{\overline{PF}}{\overline{PP_1}} = \varepsilon}$

$\overline{MO} = q$

gegeben: L, F, ε, q

$\overline{PF}^2 = (x - \varepsilon q)^2 + y^2$

$\overline{PP_1}^2 = (q + x)^2$

$\frac{\overline{PF}}{\overline{PP_1}} = \varepsilon \Leftrightarrow \overline{PF}^2 = \varepsilon^2 \cdot \overline{PP_1}^2$

$\varepsilon^2 \cdot (q + x)^2 = (x - \varepsilon q)^2 + y^2$

$\varepsilon^2 (\cancel{q^2} + 2qx + x^2) = x^2 - 2\varepsilon q x + \cancel{\varepsilon^2 q^2} + y^2$

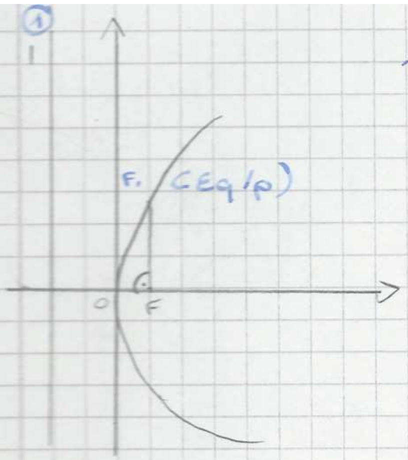
$y^2 = 2\varepsilon q x + \varepsilon^2 x^2 - x^2 + 2\varepsilon^2 q x$

$y^2 = x^2(\varepsilon^2 - 1) + 2\varepsilon q x(\varepsilon + 1)$

$\boxed{y^2 = 2px - (1 - \varepsilon^2)x^2 \quad \text{mit } p = \varepsilon(\varepsilon + 1) \cdot q}$

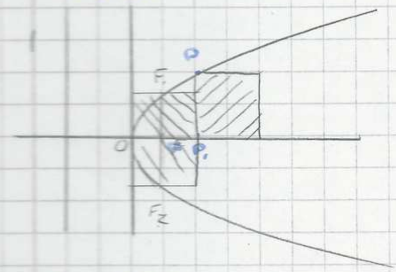
04.07

① $x = \varepsilon q \Rightarrow (y)^2 = p^2$ – geometrischer Sinn des Parameters p



② Namensgebung

$\varepsilon = 1 \Rightarrow y^2 = 2px$ Parabel ≙ griechisch: gleich



$\overline{F_1F} = p$

$\overline{PP_1} = y$

$A_{□} = y^2$

$\overline{F_1F_2} = 2p$

$\overline{OP_1} = x$

$A_{▭} = 2px$

▭: Rechteck

□: Quadrat

$\varepsilon < 1$ Ellipse ≙ griechisch unter ≙ kleiner

$\Downarrow$

$1-\varepsilon^2 > 0 \Rightarrow A_{▭} > A_{□}$

$\varepsilon > 1$ Hyperbel ≙ griechisch über ≙ größer

$1-\varepsilon^2 < 0 \Rightarrow -(1-\varepsilon^2) > 0$

$A_{▭} < A_{□}$

4. 7. 12

Optische Eigenschaften der Kegelschnitte

Hyperbel:

$\overline{PF_2} > \overline{PF_1}$

$\overline{PF_2} - \overline{PF_1} = const.$

Q = beliebiger Punkt

$\overline{QF_2} - \overline{QF_1} < \overline{PF_2} - \overline{PF_1}$

$\overline{Q_1F_2} - \overline{Q_1F_1} = \overline{PF_2} - \overline{PF_1}$

$\overline{QF_1} < \overline{QF_1} + \overline{Q_1Q} \quad | - \overline{QF}$

$\overline{QF_2} - \overline{QF_1} < \overline{Q_1F_2} + \overline{Q_1Q} - \overline{QF_1} = \overline{Q_1F_2} - \overline{Q_1F_1} = \overline{PF_2} - \overline{PF_1}$

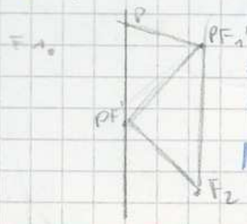
- Die Tangente durch den Punkt P ist die Winkelhalbierende von $\sphericalangle F_2PF_1$. (?)

$F_1' \in PF_2$

$\overline{PF_2} - \overline{PF_1} = \overline{PF_2} - \overline{PF_1''}$

$\overline{F_1''F_2} + \overline{F_1''P} > \overline{PF_2}$

$\overline{PF_2} - \overline{PF_1}$ max.



$\overline{PF_2} - \overline{PF_1} =$

$= \overline{PF_2} - \overline{PF_1'}$

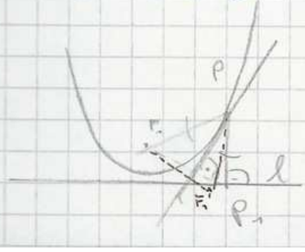
$\leq \overline{F_2F_1'}$

Max. bei Gerade P, F_1', F_2

q.e.d.

Parabel:

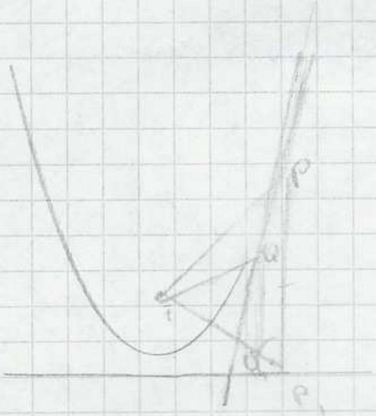
Weg I: Spiegelung von $\overline{FP}$, Beweis F_1, P_1 selber Punkt: gescheitert



Nach der Definition der Parabel ist

ΔP_1PF gleichschenklig.

Weg II



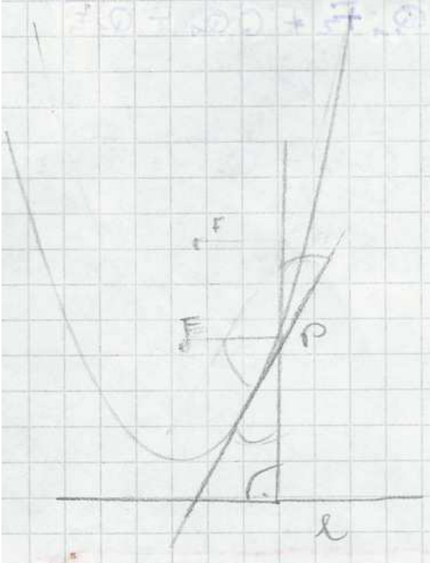
Q = 2. Schnittpunkt mit Parabel auf Mittelsenkrechte FP_1

Q_1 = Lotfußpunkt Q

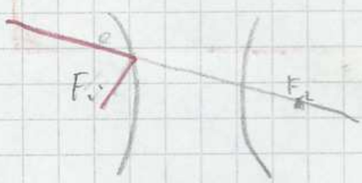
$\overline{FQ} = \overline{QP_1}$; $FQ = QQ_1$; $\overline{QP_1} = \overline{QQ_1}$

$QP_1 > QQ$

=> Tangente ist Winkelhalbierende

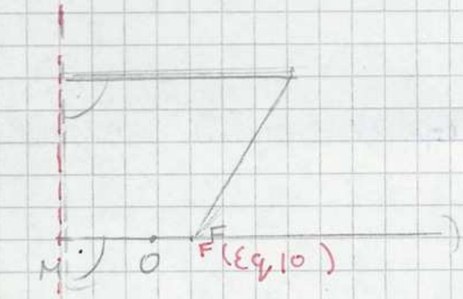


Licht: Einfallswinkel = Ausfallswinkel



4.7.12

Scheitelpunktgleichung:



X Achse ⊥ l

$F \in$ x-Achse

$O\,(0|0)$

$\overline{MO} : \overline{OF} = 1:3$

$P \in$ Kegelschnitt $\Leftrightarrow \boxed{\dfrac{\overline{PF}}{\overline{PP_1}} = \varepsilon}$

$\overline{MO} = q$

$\overline{PF}^2 = (x-\varepsilon q)^2 + y^2$

$\overline{PP_1}^2 = (q+x)^2$

Gegeben sind: l; F; ε; q

$\varepsilon^2 (q+x)^2 = (x-\varepsilon q)^2 + y^2$

$\varepsilon^2 (q^2 + 2qx + x^2) = x^2 - 2x\varepsilon q + \varepsilon^2 q^2 + y^2$

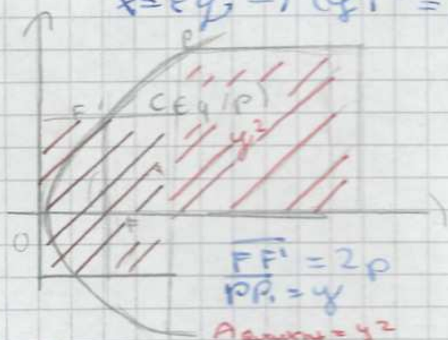
$\dfrac{\overline{PF}}{\overline{PP_1}} = \varepsilon \Leftrightarrow \overline{PF}^2 = \varepsilon^2 \overline{PP_1}^2$

$y^2 = 2\varepsilon^2 q x + \varepsilon^2 x^2 - x^2 + 2x\varepsilon q$

$y^2 = x^2(\varepsilon^2 - 1) + 2\varepsilon q x(\varepsilon + 1)$

$y^2 = 2px - (1-\varepsilon^2)x^2$ mit $p = \varepsilon(\varepsilon+1)q$

① $x = \varepsilon q \Rightarrow (y)^2 = p^2$ – geometrischer Sinn des Parameters p



$\overline{FF'} = 2p$

$\overline{PP_1} = y$

$A_{\text{Quadrat}} = y^2$

② Namensgebung

$\varepsilon = 1 \Rightarrow y^2 = 2px$ – Wort "Parabel" aus dem Griechischen und bedeutet „gleich“.

$\overline{FF'} = p$

$\overline{FP_1} = y$

$A_{\square} = y^2$

$\overline{F'F''} = 2p$

$\overline{OP_1} = x$

$A_{\square} = 2px$

$\varepsilon < 1$ Ellipse

$\Downarrow$

$1 - \varepsilon^2 > 0 \Rightarrow$

$A_{\text{Rechteck}} > A_{\text{Quadrat}}$

Ellipse kommt aus dem Griechischen und heißt „kleiner“.

$\varepsilon > 1$ Hyperbel

$1 - \varepsilon^2 < 0 \Rightarrow -(1 - \varepsilon^2) > 0$

$A_{\text{Rechteck}} < A_{\text{Quadrat}}$

Hyperbel kommt aus dem Griechischen und heißt „über“.

Herbst 2012 in der Ukraine

1. Mathestunde
16. Oktober

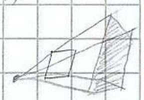
projektive Ebene
projektive Abbildungen

1. Bewegung $A \to A_1$, $B \to B_1$ $\overline{AB} = \overline{A_1B_1}$

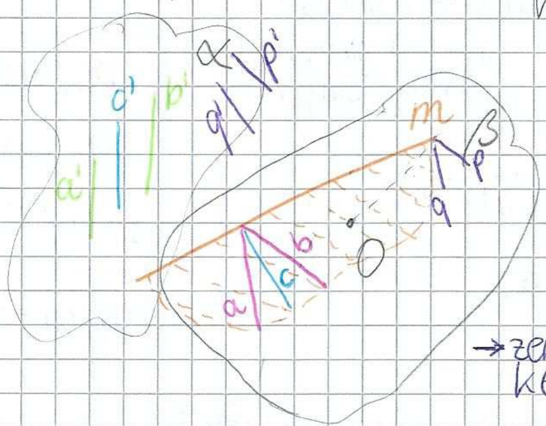
   a. Verschiebung
   b. Spiegelung
   c. Drehung

2. Streckung / *Ähnlichkeitsabbildung $A \to A_1$, $B \to B_1$ $\overline{AB} = k \cdot \overline{A_1B_1}$; $k > 0, k \neq 1$

3. affine Abbildung (Papier projeziert auf Wand, muss nicht gerade sein)
   ⇔ parallele Projektion



   Gerade → Gerade
   Parallele → Parallele
   →|← Streckung/Stauchung an einer Gerade
   Verhältnis wird beibehalten



$\alpha \parallel \beta$ - Ebenen
$O \in \beta$, orangene Ebene
$m \in \beta$
$a' \parallel b' \parallel c'$ $q' \parallel p'$

→ zentrale Projektion
keine eindeutige Zuordnung
$\alpha \cap m^*$
→ unendliche Punkte liegen auf unendlicher Geraden
→ projektive Ebene
→ Gerade schließt im Unendlichen

4. projektive Abbildung

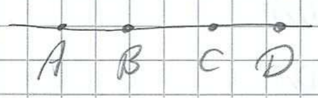
   Gerade → Gerade

Doppelverhältnis von vier Punkten

2. Mathestunde
16. Oktober

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} \cdot \frac{\overline{BD}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} : \frac{\overline{BC}}{\overline{BD}}$$

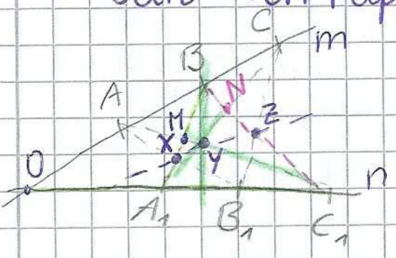
→ bleibt unverändert bei projektiven Abbildungen

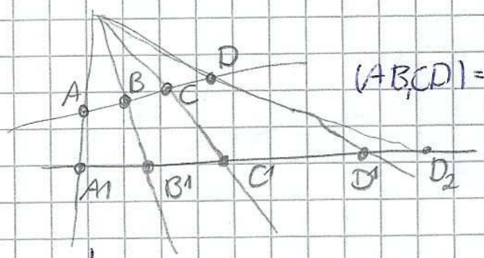


17. Oktober
3. Mathestunde

24 $\begin{cases} (A,B,C,D) = k \\ (B,A,C,D) = \frac{1}{k} \\ \ldots \end{cases}$ Möglichkeiten: $\frac{1}{k}, k, 1-k, \frac{1}{1-k}, 1-\frac{1}{k}, \frac{1}{1-\frac{1}{k}}$

Satz von Pappus





$(A B, C D) = (A' B', C' D')$

A: $BA \to A_1 C_1$
$M \to C_1$
$B \to O$
$A_1 \to A_1$
$X \to B_1$

$(OC_1, B_1 A_1) = (BM, XA_1)$

C: $BC_1 \to A_1 C_1$
$B \to O$
$N \to A_1$
$Z \to B_1$
$C_1 \to C_1$

$(BM, XA_1) = (BC_1, YN)$

$BB, MC_1, XY, A_1N \in Z$

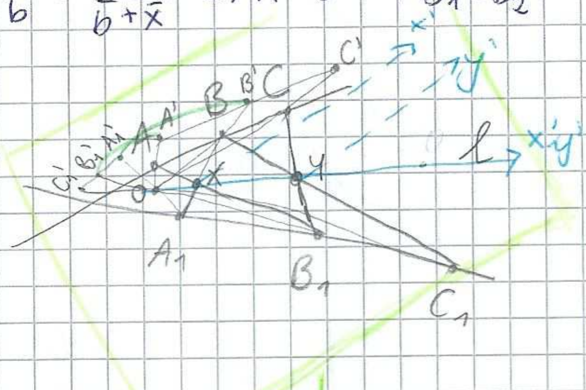
$(AB, CD) = (A_1B_1, C_1D_2) = (A_1B_1, C_1D_1)$

$\frac{A_1C_1}{A_1D_2} : \frac{B_1D_2}{B_1C_1} = \frac{A_1C_1}{A_1D_2} : \frac{B_1D_1}{B_1C_1}$

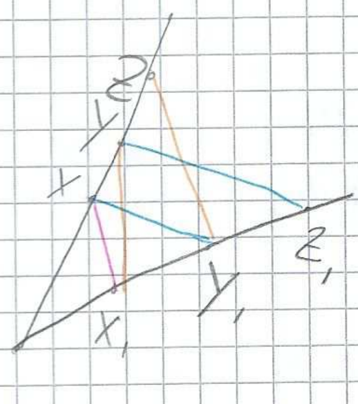
$\bar{a} = \overline{B_1D_1}$
$\bar{b} = \overline{A_1D_1}$
$\bar{x} = (\overline{D_1D_2})$

$\frac{\overline{B_1D_1}}{\overline{A_1D_1}} = \frac{\overline{B_1D_2}}{\overline{A_1D_1}}$

$\frac{\bar{a}}{\bar{b}} = \frac{\bar{a}+\bar{x}}{\bar{b}+\bar{x}} \Rightarrow \bar{x} = 0 \Rightarrow D_1 = D_2$



$L \parallel \ell$
$O \notin \ell$
$L \parallel OXY$



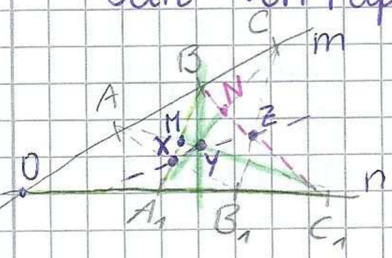
X $\begin{cases} \frac{\overline{OX}}{\overline{OY}} = \frac{\overline{OY}}{\overline{OZ_1}} \quad \frac{\overline{OY}}{\overline{OZ}} = \frac{\overline{OX_1}}{\overline{OZ_1}} \\ \frac{\overline{OY}}{\overline{OZ}} = \frac{\overline{OX_1}}{\overline{OY_1}} \end{cases}$

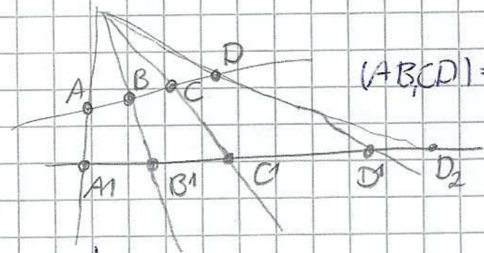
17. Oktober
3. Mathestunde

$$24\begin{cases}(A,B,C,D)=k\\(B,A,C,D)=\frac{1}{k}\\ \dots\end{cases}$$

Möglichkeiten: $\frac{1}{k},\ k,\ 1-k,\ \frac{1}{1-k},\ 1-\frac{1}{k},\ \frac{1}{1-\frac{1}{k}}$

Satz von Pappus





$(AB,CD)=(A'B',C'D')$

$A: BA \to A_1C_1$
$M \to C_1$
$B \to O$
$A_1 \to A_1$
$X \to B_1$

$(OC_1, B_1A_1) = (BM, XA_1)$

$C: BC_1 \to A_1C_1$
$B \to O$
$N \to A_1$
$Z \to B_1$
$C_1 \to C_1$

$(BM, XA_1) = (BC_1, YN)$

$BB, MC_1, XY, A_1N \in Z$

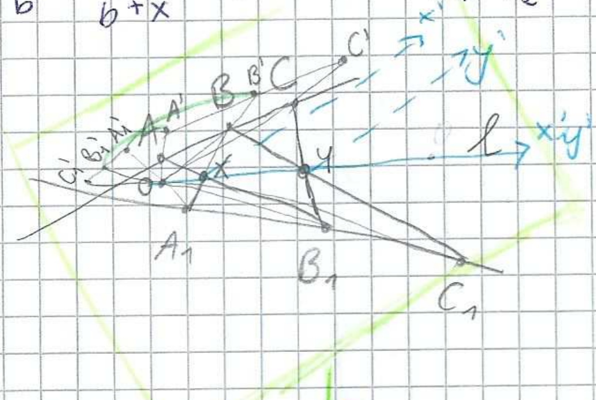
$(AB,CD) = (A_1B_1, C_1D_2) = (A_1B_1, C_1D_1)$

$$\frac{A_1C_1}{A_1D_2} : \frac{B_1D_2}{B_1C_1} = \frac{A_1C_1}{A_1D_2} : \frac{B_1D_1}{B_1C_1}$$

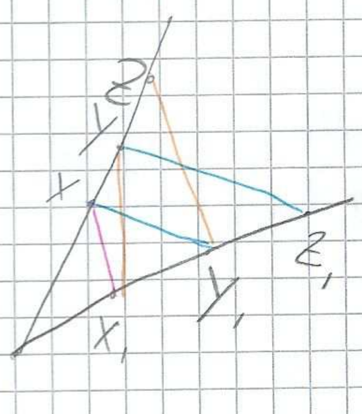
$\bar{a} = \overline{B_1D_1}$
$\bar{b} = \overline{A_1D_1}$
$\bar{x} = (\overline{D_1D_2})$

$$= \frac{\overline{B_1D_2}}{\overline{A_1D_1}}$$

$$\frac{\bar{a}}{\bar{b}} = \frac{\bar{a}+\bar{x}}{\bar{b}+\bar{x}} \Rightarrow \bar{x}=0 \Rightarrow D_1 = D_2$$



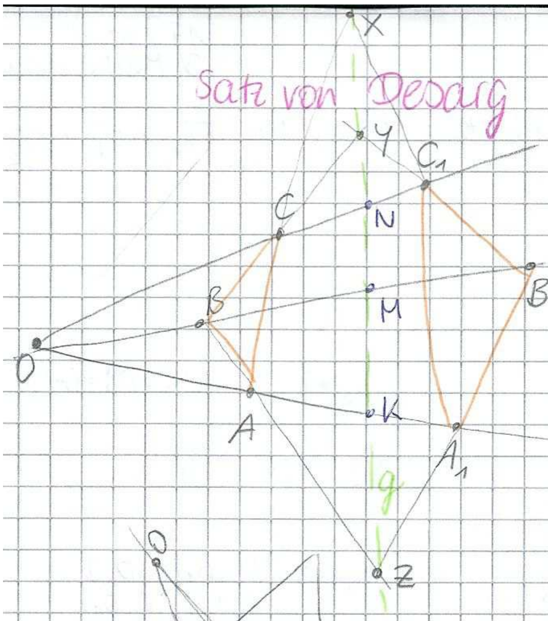
$L \parallel \ell$
$O \notin \ell$
$L \parallel OXY$



$$X\begin{cases}\frac{\overline{OX}}{\overline{OY}} = \frac{\overline{OY}}{\overline{OZ_1}} & \frac{\overline{OY}}{\overline{OZ}} = \frac{\overline{OX_1}}{\overline{OZ_1}}\\ \frac{\overline{OY}}{\overline{OZ}} = \frac{\overline{OX_1}}{\overline{OY_1}}\end{cases}$$

4. Mathestunde

Satz von Desarg



bew. $X, Y, Z \in g$

angenommen y weg

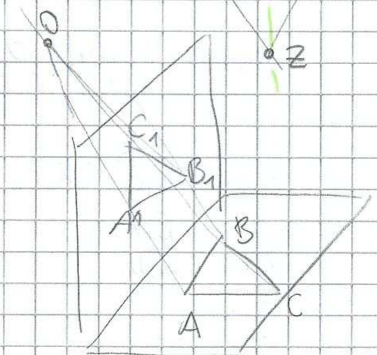
$Z: (OK, AA_1) = (OM, BB_1)$

$OA_1 \to OB_1$ //

$X: (OK, AA_1) = (ON, CC_1)$

$OC_1 \to OA_1$

MN schneidet BC und B_1C_1 in Y

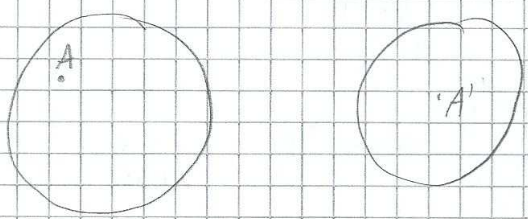


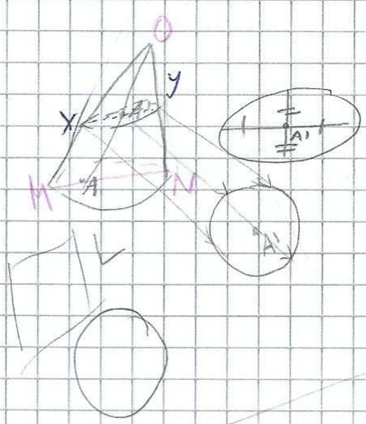
$AC \cap A_1C_1$

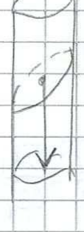
$BC \cap B_1C_1$

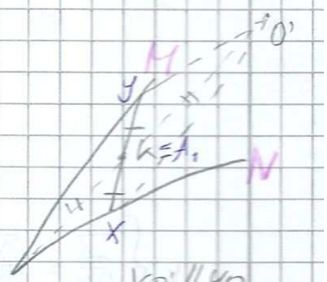
$AB_1 \cap A_1B_1$

$OCA \cap ABC \cap A_1B_1C_1$



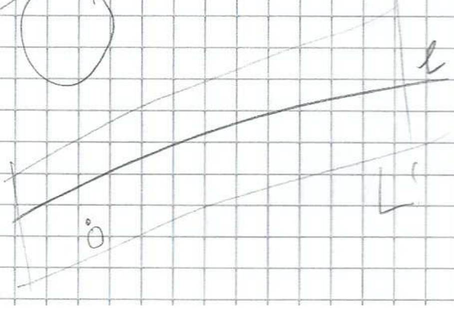






XO' // YO

YO' // OX



L || l

L' || L

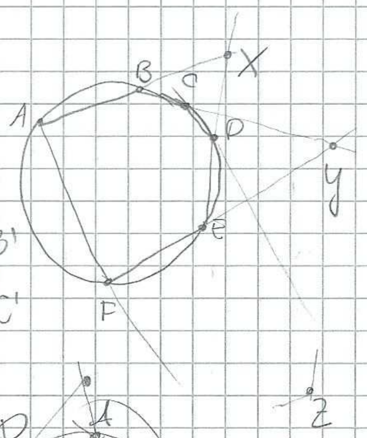
l ∈ L'

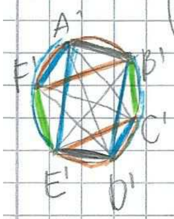
5. Mathestunde
17. Oktober

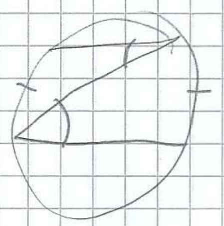
Satz von Pascal

geg. Sechseck ABCDEF eingeschrieben

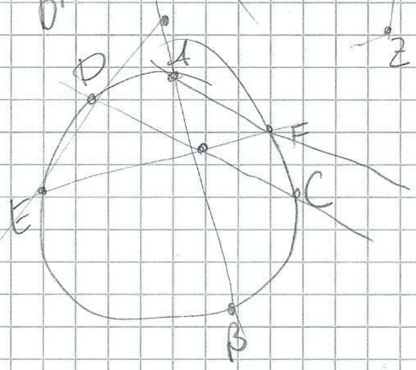
bew. $X, Y, Z \in g$

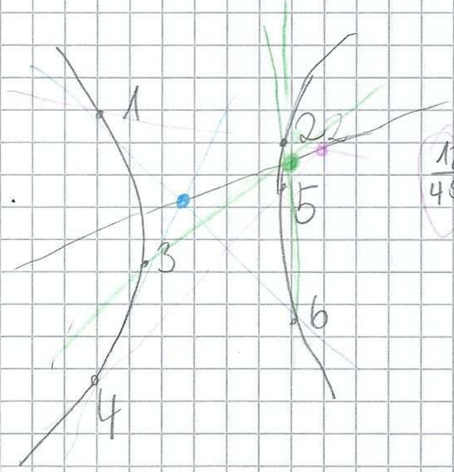






$A'B' \parallel D'E'$
$B'C' \parallel F'E'$
$C'D' \parallel A'F'$
Bogen $A'B'C'$ = Bogen $F'E'D'$

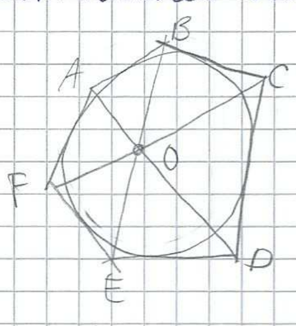


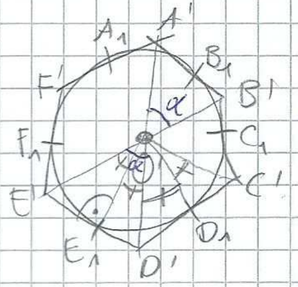


$\frac{12}{45}$ $\frac{23}{56}$ $\frac{34}{61}$

Satz von Brianchon

umbeschriebenes Sechseck ABCDEF

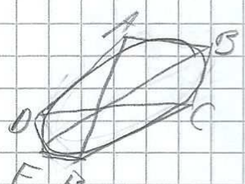




$\sphericalangle E_1 O C_1 = 2\alpha = \sphericalangle F_1 O' B_1$

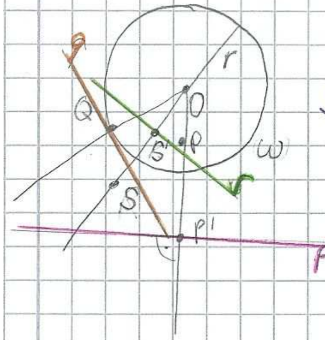
$\sphericalangle E_1 O F' = \sphericalangle F' O F_1$

$\sphericalangle B_1 O E' = \sphericalangle C_1 O C'$



6. Mathestunde
18. Oktober

Polarität



geg. Kreis ω, Mittelpunkt O, Radius r

$S, Q, P \neq O$, $P' \in$ Strahl OP, $Q \in \omega$

$\overline{OP} \cdot \overline{OP'} = r^2$ P' inverse zu P

$\overline{OQ} \cdot \overline{OQ'} = r^2$

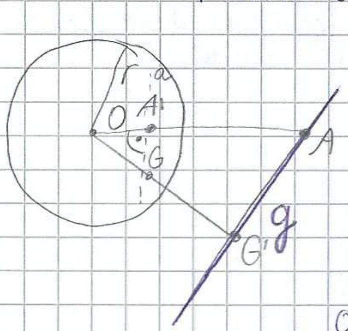
$\overline{OQ} = r \Rightarrow \overline{OQ'} = r$ $Q = Q'$

jeder Punkt des Kreises ist selbstinvers

$\overline{OS} \cdot \overline{OS'} = r^2$

$O \neq P \rightarrow p$ p - Polare des Punktes P
P - Pol der Geraden p

$\ni$ - enthalten
$\in$ - gehört zu / Element von



$\overline{OG} \cdot \overline{OG'} = r^2$

$O \notin g$

$p \leftrightarrow P$ (eindeutige Zuordnung)

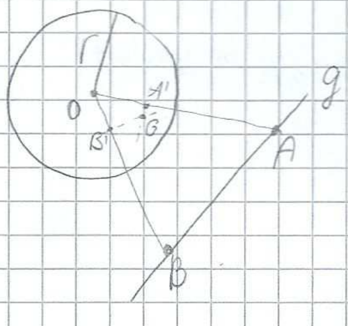
$O \in p$ $P \neq O$ $G \in a$

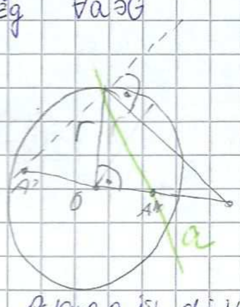
$\triangle OA'G \cong \triangle OG'A$ $\frac{\overline{OA'}}{\overline{OG}} = \frac{\overline{OG'}}{\overline{OA}} \Leftrightarrow \overline{OA'} \cdot \overline{OA} = \overline{OG} \cdot \overline{OG'} = r^2$

konjugierte Punkte $\left\{ \begin{matrix} A \\ G \end{matrix} \right.$ $\left. \begin{matrix} a \\ g \end{matrix} \right\}$ konjugierte Gerade $A \in g \Leftrightarrow G \in a$

G, g festhalten
$\forall A \in g$ $\forall a \ni G$

✳ = Geradenbüschel
G



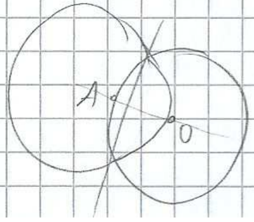


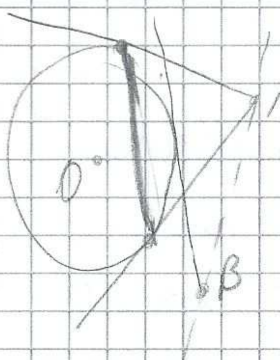
$r^2 = \overline{OA''} \cdot \overline{OA}$

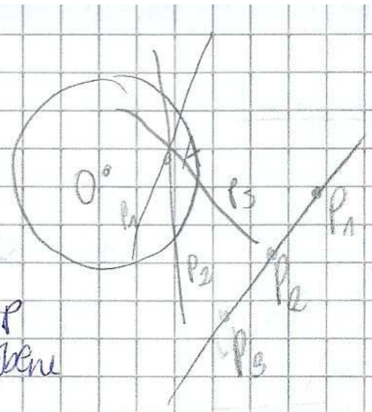
$r^2 = \overline{OA'} \cdot \overline{OA}$

Polare a ist die Verlängerungsgerade von 2 Berührpunkten der Tangenten an den Kreis von Punkt A

Tangentenkonstruktion





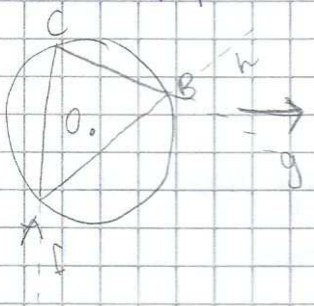


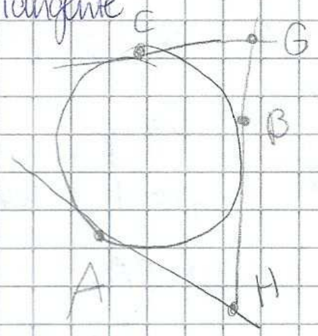
~~p~~ $p \mapsto P$
auf projektiver Ebene

Dualitätsprinzip

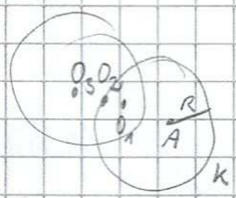
$p \leftrightarrow P$

Wörterbuch: Punkt ↔ Gerade
liegt auf einer Geraden ↔ geht durch den Punkt
Verbindungsgerade von 2 Punkten ↔ Schnittpunkt von 2 Geraden
kollineare Punkte ↔ Büschel von Geraden
Berührpunkt ↔ Tangente





Kreis = Punktmenge ↔ polare Abbildung
= Hüllkurve von Tangenten



O_1 – Ellipse
O_2 – Parabel
O_3 – Hyperbel

$O_{1/2/3}$ – Mittelpunkt