



13 Aufgaben

mit Lösungen

Isabel Riepenhausen, Alexandra Tenev und Linus Schwarz

Dr. Olga Lomonosova und Dr. Albert Oganian

haben die Aufgaben und die Lösungen vorbereitet.

Myriam Huber

hat die Aufgaben illustriert.

Isabel Riepenhausen, Alexandra Tenev und Christina Häderle haben einige Aufgaben aus dem Russischen ins Deutsche aus folgenden Büchern übersetzt:

„Lüstige Arithmetik“, N. N. Amenickij, I. P. Sacharov, Verlag „Nauka“, Moskau, 1992
 „Mathematische AG, Klassen 6 – 7“, A. V. Spivak, Verlag „Posev“, 2003

Isabel Riepenhausen, Alexandra Tenev und Linus Schwarz
 haben die Aufgaben weihnachtlich verpackt



1. Dezember 2018

Isabel Riepenhausen

Unfares Christkindl

In der Geschenkfabrik arbeiten gleich viele Wichtel und Elfen. Um ihnen für ihre harte Arbeit zu danken, hat das Christkindl eines Tages 234 Zuckerstangen mitgebracht und so verteilt, dass jeder Wichtel 5 Zuckerstangen und jede Elfe 4 Zuckerstangen bekam. Die Elfen jedoch beschwerten sich über diese Ungerechtigkeit und so brachte das Christkindl am nächsten Tag wieder Zuckerstangen mit und verteilte sie so, dass nun jeder, die Wichtel und die Elfen, jeweils 6 Zuckerstangen hatten. Wie viele Zuckerstangen hat das Christkindl am zweiten Tag zusätzlich mitgebracht?



Lösung:

$x = \text{Anzahl Wichtel} = \text{Anzahl Elfen}; 234 = 5x + 4x = 9x; x = 26$
 $a = \text{Zuckerstangen, die das Christkindl am zweiten Tag mitbringt.}$
 $234 + a = 6x + 6x = 12x = 12 \cdot 26 = 312; a = 312 - 234 = 78$

Antwort: Das Christkindl hat am zweiten Tag 78 neue Zuckerstangen mitgebracht.

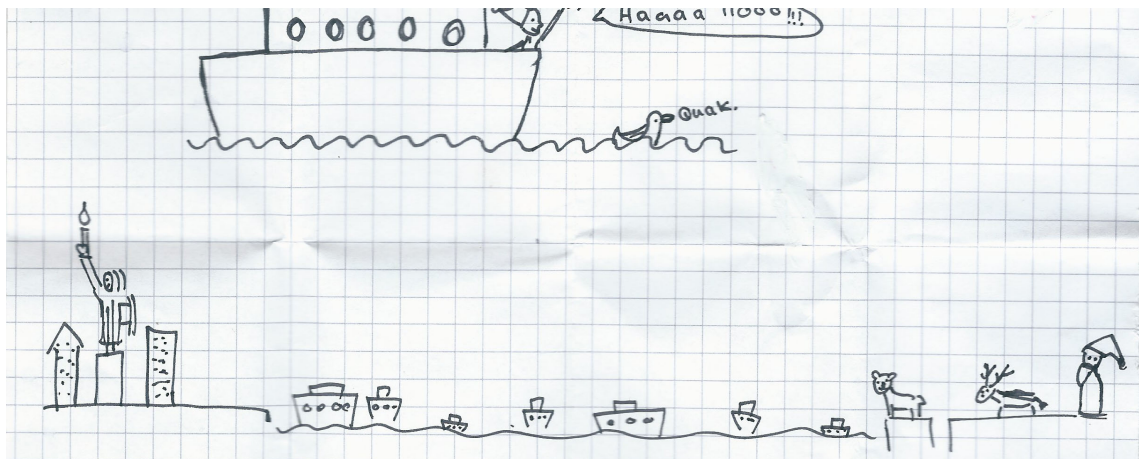
2. Dezember 2018

Alexandra Tenev

Dampfer mit Geschenken

Um dem Weihnachtsmann die Arbeit zu vereinfachen, schicken Elfen jeden Tag einen Dampfer voll mit Geschenken los in Richtung der geheimen Packstation in New York. Die Dampfer starten jeden Tag um genau 12:00 Uhr vom Nordpol aus und brauchen genau 7 Tage, bis sie in New York sind. Die leeren Dampfer starten jeden Tag um genau 12:00 Uhr von New York zum Nordpol aus und brauchen auch genau 7 Tage, bis sie in New York sind. Die vollen und die leeren Dampfer fahren gleichförmig.

Am 16. Dezember schicken die Elfen den letzten Dampfer mit Geschenken los. Wie vielen entgegenkommenden leeren Dampfern begegnet er auf der Strecke nach New York?



@ Nordpol (NP)

	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.	15.	16.	... 12. 2018
1.T.	↓	↑	↓	↑	↓	↑	↓	↑	↓	↑	↓	↑	↓	↑	↓	
2.T.	↓	↑	↓	↑	↓	↑	↓	↑	↓	↑	↓	↑	↓	↑	↓	
3.T.	↓	↑	↓	↑	↓	↑	↓	↑	↓	↑	↓	↑	↓	↑	↓	
4.T.	↓	↑	↓	↑	↓	↑	↓	↑	↓	↑	↓	↑	↓	↑	↓	
5.T.	↓	↑	↓	↑	↓	↑	↓	↑	↓	↑	↓	↑	↓	↑	↓	
6.T.	↓	↑	↓	↑	↓	↑	↓	↑	↓	↑	↓	↑	↓	↑	↓	
7.T.	↓	↑	↓	↑	↓	↑	↓	↑	↓	↑	↓	↑	↓	↑	↓	

@ New York (NY)

- Als No. 16 losfährt, kommt No. 2 an: ~~13~~ (No. 16 begegnet No. 2 nicht auf dem Weg.)
- No. 16 ist 1 Tag unterwegs, trifft No. 3 auf 0,5 Tag: ~~1~~ 1
- No. 16 ist 1 Tag unterwegs, trifft No. 4 " 1 " : ~~2~~ 2
- No. 16 ist 2 Tage unterwegs, trifft No. 5 auf 1,5 Tag: ~~3~~ 3
- No. 16 ist 2 Tage unterwegs, trifft No. 6 " 2 " : ~~4~~ 4
- No. 16 ist 3 Tage unterwegs, trifft No. 7 auf 2,5 Tag: ~~5~~ 5
- No. 16 ist 3 Tage unterwegs, trifft No. 8 " 3 " : ~~6~~ 6
- No. 16 ist 4 Tage unterwegs, trifft No. 9 auf 3,5 Tag: ~~7~~ 7
- No. 16 ist 4 Tage unterwegs, trifft No. 10 " 4 " : ~~8~~ 8
- No. 16 ist 5 Tage unterwegs, trifft No. 11 auf 4,5 Tag: ~~9~~ 9
- No. 16 ist 5 Tage unterwegs, trifft No. 12 " 5 " : ~~10~~ 10
- No. 16 ist 6 Tage unterwegs, trifft No. 13 auf 5,5 Tag: ~~11~~ 11
- No. 16 ist 6 Tage unterwegs, trifft No. 14 " 6 " : ~~12~~ 12
- No. 16 ist 7 Tage unterwegs, trifft No. 15 " 6,5 Tag: ~~13~~ 13

Lösung: No. 16 begegnet ~~13~~ 13 Fähren, immer auf 0,5 Tag Abstand.



Lösung:

Nennen wir den Dampfer, der am 16.12. am Nordpol startet, D_p und die Dampfer, die von New York starten, D_y . D_p begegnet allen D_y , die am 16.12. um 12:00 Uhr noch unterwegs sind und er begegnet allen D_y , die starten, solange D_p unterwegs ist. Und natürlich begegnet D_p auch dem D_y , der zur gleichen Zeit startet wie er. Am 16.12. um 12:00 Uhr kommt der D_y vom 09.12. gerade an, die beiden begegnen sich also nicht. Alle D_y , die zwischen dem 09.12. und dem 16.12. gestartet sind, sind noch unterwegs, werden also D_p begegnen. D_p wird, wie erläutert, auch den D_y begegnen, die zwischen dem 16.12 und dem 23.12 starten (am 23.12 kommt D_p in New York an). Der D_y , der am 23.12. startet, wird nicht dazugezählt, der D_y , der am 16.12. startet, natürlich schon. Insgesamt kommt man auf 13 D_y , denen D_p begegnet.

Antwort: Er begegnet 13 leeren Dampfern.

3. Dezember 2018

Isabel Riepenhausen

Fliegende Schlitten

Der Weihnachtsmann fliegt mit seinem Schlitten auf direktem Wege von seiner Wohnung zur Geschenkefabrik. Auf der Strecke gibt es sehr viele Hindernisse, weshalb die Rentiere nur am Hoch- und Runterfliegen sind. Fliegen sie nach oben, haben sie eine gleichmäßige Geschwindigkeit von 15 km/h, fliegen sie nach unten, sind sie doppelt so schnell. Insgesamt braucht der Schlitten für den Hin- und Rückweg 4 Stunden. Berechne die Länge der Strecke zwischen der Wohnung des Weihnachtsmannes und der Geschenkefabrik. Gehe davon aus, dass die Rentiere ohne Unterbrechung unterwegs waren.

Lösung:

Sei x die Länge der gesuchten Strecke in km. Dann sind die Zeit in Stunden für den Weg nach oben $\frac{x}{15}$ und die Zeit in Stunden für den Weg nach unten $\frac{x}{30}$. Gesamtzeit ist 4 Stunden, deswegen gilt $\frac{x}{15} + \frac{x}{30} = 4$. Aus dieser Gleichung folgt $x=40$.

Antwort: Die Strecke zwischen der Wohnung und der Geschenkefabrik beträgt 40 km.

4. Dezember 2018

Isabel Riepenhausen

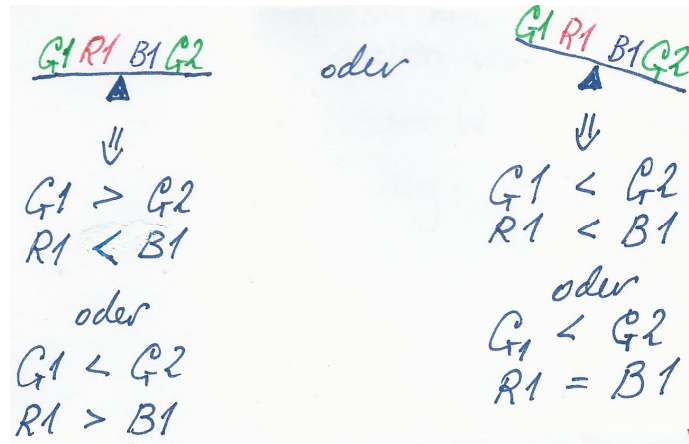
Farbige Geschenke

Es gibt 2 rot-, 2 gelb- und 2 grün-eingepackte Geschenke. Von jeder Farbe gibt es ein leichtes sowie ein schweres Geschenk, wobei alle schweren Geschenke den gleichen Inhalt haben, dasselbe gilt für die leichten Geschenke. Leider sind die schweren optisch nicht von den leichten Päckchen zu unterscheiden. Die Wichtel wollen nun aber alle leichten Geschenke von den schweren trennen und haben dabei nur eine Balkenwaage zur Verfügung. Gebe ihnen eine Anleitung, wie sie in nur 2 Messungen das Aussortieren schaffen können.



Lösungsansatz:

1. Messung



2. Messung

G1 und G2
vergleichen

R1 und B1
vergleichen

5. Dezember 2018

Isabel Riepenhausen

Mehl für Gebäcke

Um den Kindern Gebäcke in ihre Nikolausstiefel legen zu können, haben mehrere Bäcker angefangen, Mehl zu kaufen. Da es in der Umgebung nur einen Supermarkt gibt, müssen alle drei Bäcker in denselben gehen, wo es das Mehl nur in 1-Kilo-Packungen gibt. Der erste Bäcker kauft dort die Hälfte des ganzen Mehls und noch 0,5 kg Mehl. Der zweite Bäcker kommt etwas später und kauft vom übrigen Mehl ebenfalls die Hälfte und dann auch noch 0,5 kg Mehl dazu. Danach besucht der dritte Bäcker den Laden und kauft ebenfalls vom übrigen Mehl die Hälfte und noch 0,5 kg Mehl. Jetzt ist das gesamte Mehl im Laden ausverkauft. Wie viele Packungen waren am Anfang da, wenn keine von ihnen angebrochen waren und am gesamten Tag kein Mehl dazugegeben wurde?

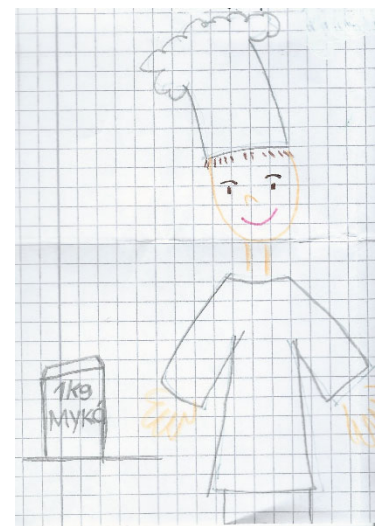
Lösung:

Man kann von hinten beginnen, indem man zuerst ausrechnet, wie viel Mehl vor dem dritten Bäcker da war. Nennen wir die Anzahl der Packungen A:

$$A = 0,5 * A + 0,5; 0,5 * A = 0,5; A = 1$$

Also war, bevor der dritte Bäcker kam, genau 1 Packung Mehl da. Für die Anzahl Packungen vor dem zweiten Bäcker kann man sagen (diese Anzahl wird B genannt):

$$B - (0,5 * B + 0,5) = A; B - (0,5 * B + 0,5) = 1; B - 0,5 * B - 0,5 = 1; B - 0,5 * B = 1,5;$$





$$0,5 * B = 1,5; B = 3$$

Bevor der zweite Bäcker kam, waren also drei Packungen Mehl da. Nennen wir die Anzahl der Mehlpackungen, die vor dem ersten Bäcker, also am Anfang, da waren, C.

$$C - (0,5 * C + 0,5) = B; C - (0,5 * C + 0,5) = 3;$$

$$C - 0,5 * C - 0,5 = 3; C - 0,5 * C = 3,5; 0,5 * C = 3,5; C = 7$$

Antwort: Zu Beginn waren 7 Mehlpackungen im Laden.

6. Dezember 2018

Isabel Riepenhausen

Starke Wichtel

30 Wichtel werden beauftragt, Geschenke in den Dampfzügen zu verstauen. Jeder soll so viel nehmen, wie er tragen kann und muss nur einmal laufen. Trixie, der kräftigste von allen, trägt 13 Geschenke, die restlichen Wichtel tragen weniger. Zeige, dass es min. 3 Wichtel gibt, die die gleiche Anzahl an Geschenken tragen.

Lösung:

Sagen wir, die ersten Wichtel tragen alle jeweils unterschiedliche Anzahlen an Geschenken. Also trägt Trixie 13, ein weiterer Wichte 12, der nächste 11 Geschenke, usw.. So kann man 13 Wichtel mit Geschenken versorgen. Man könnte genauso den nächsten 13 Wichteln Geschenke geben, dann gäbe es immer jeweils 2 Wichtel, die die gleiche Anzahl von Geschenken tragen. Nun haben aber erst 26 Wichtel Geschenke. Der nächste Wichtel muss also eine Anzahl von Geschenken tragen, die schon zwei andere Wichtel getragen haben.

7. Dezember 2018

Linus Schwarz

Bethlehem und Nazareth

Auf der langen Reise von Nazareth nach Bethlehem im Jahre 0 v. Chr. und 0 nach Chr. fragt sich Josef, wann diese Städte gegründet wurden. Er weiß nur, dass Bethlehem 556 Jahre älter alt Nazareth ist und dass vor genau 37 Jahren Bethlehem dreimal so alt wie Nazareth war.

- Wann wurden Bethlehem und Nazareth gegründet?
- Wann wird Bethlehem doppelt so alt wie Nazareth sein?

Lösung:

- Seien b das Alter von Bethlehem und n das Alter von Nazareth vor 37 Jahren.
Zunächst wird die Situation aus der Perspektive von vor 37 Jahren betrachtet. Dann ergeben sich aus den Angaben folgende Gleichungen:
(I) $b = n + 556$; (II) $b = 3 * n$
Durch Gleichsetzen von (I) und (II) erhält man: $n + 556 = 3 * n$.
Die Umformung ergibt $n=278$. Einsetzen in (I) ergibt $b=834$.
Da dies vor 37 Jahren war, gilt heute $n=278+37=315$ und $b=834+37=871$.
- Sei t die Zeit, die vergeht, bis $b + t = 2 * (n + t)$.
Umformen ergibt: $b - 2n = t$.
Durch Einsetzen von b und n erhält man: $871-2*315=241$.



Antwort:

- a) Betlehem wurde 871 v. Chr. und Nazareth 315 v. Chr. gegründet.
- b) In 241 Jahren, also im Jahr 241 n. Chr. wird Betlehem doppelt so alt wie Nazareth sein.

8. Dezember 2018

Linus Schwarz

Nikolaus

Knecht Ruprecht will einen Lehrling aufnehmen, der mindestens 40 Jahre alt ist. Er hat zwei Bewerber: Angelo und Noel.

Angelo sagt: Wenn ich noch die Hälfte, ein Drittel und ein Viertel meines Lebens lebe, werde ich 100 Jahre alt sein.

Noel sagt: Wenn ich noch die Hälfte, zwei Drittel und drei Viertel meines Lebens lebe, werde ich 105 Jahre alt sein.

Wen soll Knecht Ruprecht annehmen?

Lösung:

Aus den Aussagen lassen sich zwei Gleichungen für das jeweilige Alter aufstellen und lösen:

$$\text{Angelo: } 100 = x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x$$

Bringt man den Bruch rechts auf einen gemeinsamen Nenner ergibt sich: $100 = \frac{25}{12} \cdot x$

löst man das auf, erhält man $x = 48$ als Alter für Angelo.

$$\text{Noel: } 105 = x + \frac{1}{2}x + \frac{2}{3}x + \frac{3}{4}x$$

Bringt man den Bruch rechts auf einen gemeinsamen Nenner ergibt sich: $105 = \frac{35}{12} \cdot x$

löst man das auf, erhält man $x = 36$ als Alter für Noel.

Antwort: Er soll Angelo annehmen, da er 48 Jahre alt ist, und nicht Noel, weil er mit 36 Jahre zu jung die angebotene Lehrling Stelle ist.

9. Dezember 2018

Isabel Riepenhausen

Geklauter Punsch

Ein Wichtel mixt aus 800 ml Früchtetee und 1200 ml Orangensaft insgesamt 2 Liter Punsch. Eine Elfe möchte etwas davon probieren und trinkt einen Becher mit 125 ml Punsch. Damit niemand bemerkt, dass sie etwas gestohlen hat, gleicht sie die gestohlene Menge aus und verwendet dafür 60 ml Orangensaft sowie Wasser. Wie viele ml Orangensaft, Früchtetee und Wasser sind jetzt jeweils in den 2 l Punsch enthalten?

Lösung:

Man weiß, dass zu Beginn 1200 ml Orangensaft im Punsch enthalten sind. Man hat also ein Verhältnis von Früchtetee zu Orangensaft von 800 : 1200. Das kann man kürzen zu 2 : 3. Also gilt für das Glas, dass sich die Elfe klaut, ebenfalls dieses Verhältnis:

$$125 = 2x + 3x; x = 25$$

Es waren also 50 ml Früchtetee und 75 ml Orangensaft in ihrem Glas. Man hat also in dem Punsch nur noch 1125 ml Orangensaft und 750 ml Früchtetee. Die Elfe gibt insgesamt 125 ml Flüssigkeit dazu, davon sind 60 ml Orangensaft und demnach 65 ml Wasser.



Antwort:

Es sind am Ende 1185 ml Orangensaft, 750 ml Fruchtetee und 65 ml Wasser im Punsch.

10. Dezember 2018

Linus Schwarz

Geschenke

In der Geschenkfabrik des Weihnachtsmannes werden alle Geschenke nummeriert und auf eine bestimmte Weise verpackt: Geschenke mit einer geraden Nummer müssen rotes Geschenkpapier haben.

Von einem Wichtel, wurden aber 11 Geschenke entdeckt, die vielleicht falsch verpackt sind: 4 mit einer blauen, 2 mit einer grünen und 5 mit einer roten Verpackung. Über die Nummerierung ist nichts bekannt.

Welche davon muss er öffnen, um alle Fehler zu beheben?

Lösung:

Hat ein Geschenk eine rote Verpackung, ist es egal welche Zahl das Geschenk hat, da nicht ausgeschlossen ist, dass auch Geschenke mit ungerader Zahl eine rote Verpackung haben dürfen.

Also muss er nur die mit einer anderen Geschenkpapierfarbe überprüfen.

Antwort: er muss die mit der blauen und die mit der grünen Verpackung öffnen.

11. Dezember 2018

Erste Flugstunden

Isabel Riepenhausen

Rudolf braucht 20 Minuten, um von zu Hause bis zur Rentierschule zu kommen, wo er Flugstunden hat. Auf dem Weg zur Schule bemerkt er, dass er seine Knieschützer zu Hause vergessen hat. Er weiß, dass, wenn er in diesem Moment umdreht, um die Schützer zu holen, 10 Minuten zu spät kommt und dass wenn er ohne die Schützer weitergeht, er 8 Minuten vor Unterrichtsbeginn ankommt. Rudolf bewegt sich gleichförmig mit der gleichbleibenden Geschwindigkeit.

Welchen Teil der Strecke zur Schule hat er in diesem Moment hinter sich?

Lösung:

Wenn Rudolf umdreht, wird er bereits zurückgelegter Weg noch Mal hin – und zurück zurücklegen, wofür er 18 Minuten braucht. Deswegen ist er bereits 9 Minuten unterwegs und ist $\frac{9}{20}$ der Gesamtstrecke geflogen.

Antwort: $\frac{9}{20}$ der Gesamtstrecke.



12. Dezember 2018

Linus Schwarz

Früchtepunsch

Zur Feier des Tages nach Weihnachten schenkt der Weihnachtsmann den drei Elfen, die ihm am meisten geholfen haben zusammen 21 gleiche Fässer Punsch. Jedoch sind 7 Fässer voll, 7 halbvoll und 7 leer.

Wie sollen die Elfen untereinander die Fässer untereinander aufteilen, sodass jeder gleichviel erhält, wenn sie keinen Punsch umfüllen dürfen?

Lösung und Antwort:

Zwei erhalten je zwei volle und drei halbvolle und zwei leere Fässer und der dritte drei volle, ein halbvoll und drei leere. Somit hat jeder 3,5 Fässer Punsch.





Zusatzaufgabe 2018 ☺

Linus Schwarz

Der Weihnachtsmann

Um alle Geschenke rechtzeitig verteilen zu können, muss der Weihnachtsmann die gesamte Welt, 40.000km, am Stück umrunden. Dabei reist er entlang eines Längengrades der Erde, sodass sein Weg ihn vom Nordpol über Nord- und Südamerika zum Südpol führt, von wo er dann weiterfliegt. Er kommt an Australien, Indonesien und Russland vorbei und kommt schließlich wieder am Nordpol an.

Er kann nur am Nordpol starten und landen. Rudolph das Rentier muss während der ganzen Reise alle 100km eine Karotte essen, um den Schlitten weiter ziehen zu können. Jedoch ist auf dem Schlitten des Weihnachtsmanns nur Platz für 200 Karotten.



Zum Glück hat er Hilfe von seinen beiden Elfen Elvina und Merlin, die beide einen eigenen Schlitten mit einem Rentier besitzen, der jeweils 200 Karotten transportieren kann und genauso schnell wie der des Weihnachtsmanns sind. Auch ihre Rentiere benötigen alle 100km jeweils eine Karotte.

Sie können untereinander Karotten austauschen, wenn sie nebeneinander sind, und niemand darf abstürzen. Nur am Nordpol gibt es die Möglichkeit, den Vorrat an Karotten wieder aufzufüllen.

Wie kann der Weihnachtsmann die Welt umrunden?

Lösung:

Zunächst fliegen alle drei nach Amerika los. Nach 5.000 km besitzen alle noch 150 Karotten. Elvina gibt jeweils 50 Karotten an den Weihnachtsmann und Merlin ab und kehrt zum Nordpol zurück.

Nach weiteren 5.000km, nach einem Viertel der Strecke, besitzen der Weihnachtsmann und Merlin noch 150 Karotten. Nun gibt Merlin 50 an den Weihnachtsmann ab und kehrt zum Nordpol zurück.

Am Nordpol füllen Elvina und Merlin ihre Vorräte wieder auf und Elvina fliegt dem Weihnachtsmann nach Asien entgegen. Nach 10.000km treffen sie sich und Elvina gibt dem Weihnachtsmann, der gerade seine letzte Karotte verfüttert hat, 50 von ihren verbleibenden 100 ab.

Dann fliegt Merlin vom Nordpol aus den beiden entgegen und trifft sie nach 5.000km, wo er ihnen jeweils 50 Karotten abgibt und mit ihnen zurück zum Nordpol fliegt.