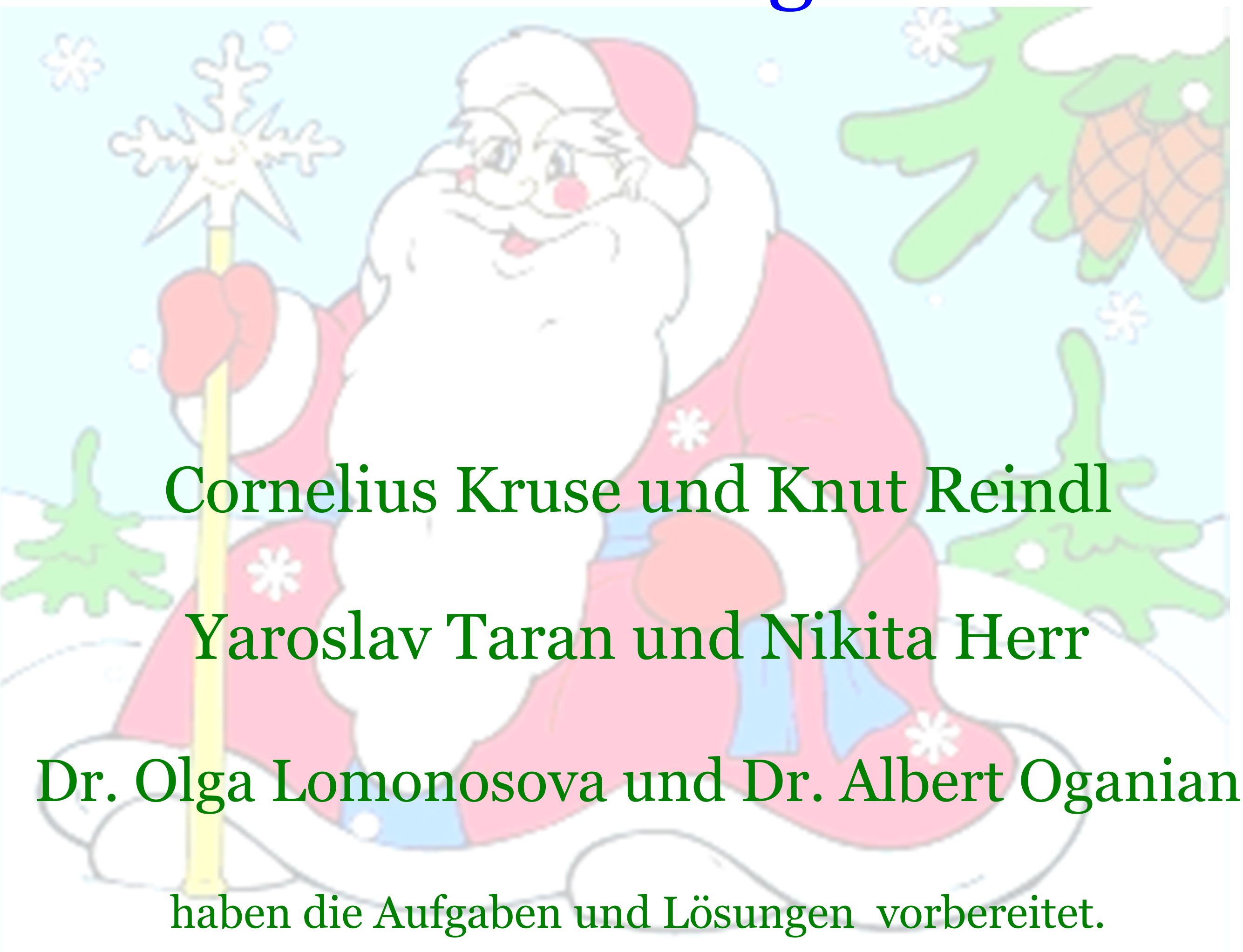
8. LGH-Mathematik Adventskalender

für Klassen 7-8

16 Aufgaben mit Lösungen



Cornelius Kruse und Knut Reindl

Yaroslav Taran und Nikita Herr

Dr. Olga Lomonosova und Dr. Albert Oganian

haben die Aufgaben und Lösungen vorbereitet.

Schuljahr 2015/2016

1. Dezember 2015

Knut Reindl

Neues Weihnachtsgeschichtsbuch

Wichtel Hans, der Oberwichtel, will sich ein neues Weihnachtsgeschichtsbuch kaufen, doch fehlen im dafür 7 Wichteltaler. Deshalb fragt er seinen Stellvertreter, Jürgen, ob dieser ihm das Buch kaufen kann. Doch fehlt ihm auch 1 Wichteltaler. Auch wenn die beiden ihr Geld zusammenlegen, können sie das Buch nicht kaufen. Wie viel kostet das neue Weihnachtsgeschichtsbuch?

Lösung:

Da Jürgen nur ein Wichteltaler fehlt und den beiden das Geld zusammen auch nicht reicht, kann Hans keinen Wichteltaler haben und da ihm 7 Wichteltaler fehlen, kostet das Buch auch 7 Wichteltaler.

2. Dezember 2015

Cornelius Kruse

Wie viele Geschenke?

"Meine Familie ist ziemlich groß", sagt der kleine Max, "und wenn sich zu Weihnachten alle treffen, denn werden 870 Geschenke ausgetauscht. Dabei bekommt jeder von jedem immer nur genau ein Geschenk." Wie groß ist die Familie?

Lösung:

Sei n die Anzahl der Personen in der Familie. Jeder schenkt die Geschenke allen, außer sich selber. Deswegen ist $870 = n \cdot (n-1) = 30 \cdot 29$. Die Familie besteht aus 30 Personen.

3. Dezember 2015

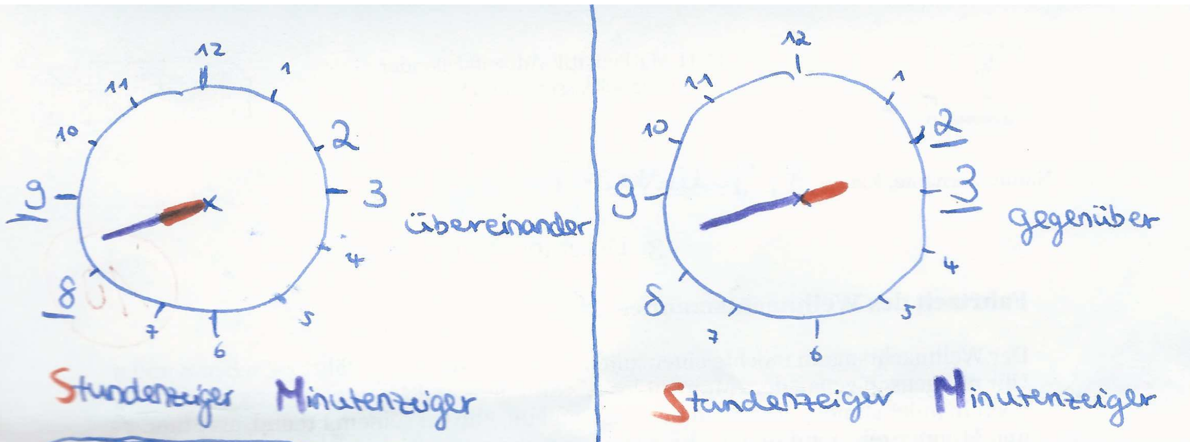
Knut Reindl

Fahrtzeit des Weihnachtsmannes

Der Weihnachtsmann möchte einen guten Freund besuchen, er fährt zwischen 8 und 9 Uhr morgens in genau dem Moment los, als Stunden- und Minutenzeiger genau übereinander standen. Der Weihnachtsmann klingelte bei seinem Freund, als Stunden- und Minutenzeiger auf seiner Uhr, zwischen 2 und 3 Uhr, sich genau gegenüber standen. Wie lange war er unterwegs?

Lösung:

Zwischen 8 und 9 Uhr stehen die Zeiger nur einmal genau übereinander, genau wie zwischen 2 und 3 Uhr. Nimmt man an, dass man den Stundenzeiger nach hinten hinaus verlängert, also nach 6 Stunden der Zeiger und seine Verlängerung die Position vertauscht haben. Dabei steht der Minutenzeiger immer noch auf der gleichen Position wie 6 Stunden zuvor. Dieses Verhalten der beiden Zeiger, gilt für jede Uhrzeit. Umgekehrt gilt, dass wenn der Minutenzeiger zweimal zwischen der gleichen Uhrzeit steht, einmal deckungsgleich und einmal als Verlängerung des Stundenzeigers, dass dann 6 Stunden vergangen sind. In unserem Fall stimmt das Verhalten der beiden Zeiger mit dem obig genannten überein, was bedeutet, dass der Weihnachtsmann genau 6 Stunden unterwegs war.



Da sich 2,3 und 8,9 genau gegenüberliegen, ist der Minutenzeiger bei beiden gleich. Somit war der Weihnachtsmann genau (8−2=) 6 Stunden unterwegs.

4. Dezember 2015

Knut Reindl

Getränke des Weihnachtsmannes

Jeden Abend trinkt der Weihnachtsmann eine Tasse Tee und ein Glas Wein. Das Glas und die Tasse fassen das gleiche Volumen der entsprechenden Flüssigkeit. Jedoch hat der Weihnachtsmann die Angewohnheit, immer zuerst einen Löffel von dem Tee in das Weinglas zu schütten, mischen, und danach einen Löffel aus dem Glas in die Tasse zu schütten. Er benutzt dafür den gleichen Löffel. Eines Tages fragt er sich, in welchem der beiden Behälter das Volumen der fremden Flüssigkeit größer ist. Weißt du die Antwort? Bitte keine Gleichungen erstellen, weil der Weihnachtsmann so eine Lösung nicht verstehen würde ☺

Lösung:

Es wird genau so viel Tee im Weinglas bleiben wie viel Wein in das Glas mit dem Tee geschüttet wird.

5. Dezember 2015

Knut Reindl

Ein Rätsel für den Weihnachtsmann

In einer Familie stellte der Vater dem Weihnachtsmann folgendes Rätsel:
„Ich habe drei Söhne, das Produkt ihres Alters beträgt 36. Die Summe ergibt meine Hausnummer. Wie alt sind meine Söhne?“
Natürlich kannte der Weihnachtsmann die Hausnummer der Familie, konnte das Rätsel trotzdem nicht lösen, deshalb ging er zum Vater und sagte:
„Mir fehlt noch eine Angabe um das Rätsel zu lösen!“
„Stimmt“, sagte dieser, „ich vergaß ihnen zu sagen, dass mein ältester Sohn Klavier spielt!“
Nach dieser Aussage konnte der Weihnachtsmann das Rätsel lösen. Wie alt sind die drei Kinder?

Lösung:

Der Weihnachtsmann kann die Zahl 36 in drei Faktoren zerlegen und die Summe der Faktoren in jeder Zerlegung mit der ihm bekannten Hausnummer vergleichen. Da er immer noch nicht weiß, wie alt die Söhne sind, gibt es zwei Zerlegungen mit der gleichen Summe der Faktoren. Diese sind $1 \cdot 6 \cdot 6$ und $2 \cdot 2 \cdot 9$ mit der Summe 13. Aus der Angabe, dass es der ältester Sohn gibt, kann der Weihnachtsmann zwischen zwei Zerlegungen wählen und sagen, dass die Zwillinge zwei Jahre alt sind. Und der 9 – Jähriger Sohn Klavier spielt.

6. Dezember 2015

Knut Reindl

Wer lügt?

Der Wichtel Alfred bekommt ein Gespräch von zwei Packwichteln mit:
1. Packwichtel: „Ich habe erst dreimal in meinem Leben gelogen!“
2. Packwichtel: „Dann hast du jetzt zum vierten Mal gelogen!“
Wer von den beiden hat gelogen?

Lösung:

Wenn die Aussage des 1. Packwichtels tatsächlich seine vierte Lüge gewesen wäre, hätte er davor wirklich erst dreimal gelogen, hätte also die Wahrheit gesagt, was ein Widerspruch wäre. Deshalb war die Aussage des ersten Packwichtels eine Wahrheit und somit die des zweiten eine Lüge. Also hat der zweite Packwichtel gelogen.

7. Dezember 2015

Cornelius Kruse

Nikolaus unterwegs

Der Nikolaus hatte alle Geschenke verteilt und war auf dem langen Weg nach Hause. Nach dem er die Hälfte des Weges hinter sich hatte, hatte er eine übergroße Sehnsucht nach seinem weichen Bett und vergrößerte er seine Geschwindigkeit um 25% und kam eine halbe Stunde früher als angenommen zu Hause an.
Wie lange dauert der gesamte Weg des Nikolaus bis nach Hause, wenn seine Bewegung sowohl in der 1. als auch in der 2. Hälften des Weges gleichförmig war?

Lösung:

Sei der gesamte Weg S. In der 1. Hälfte des Weges seien die Geschwindigkeit v in $\frac{km}{h}$ und die Zeit t in Stunden.

Dann gilt $\frac{S}{2} = vt = \frac{5}{4}v(t - \frac{1}{2})$. Nash der Umformung erhält der Weihnachtsmann $t = \frac{5}{2}h$.

Deswegen dauerte der gesamte Weg $2t - \frac{1}{2} = 2,5$ Stunden.

8. Dezember 2015

Cornelius Kruse

Wichtel beladen den Schlitten

Ein Wichtel bringt ein Geschenk in 20 Minuten zum Schlitten des Weihnachtsmannes. Wie weit liegt das Geschenkelager vom Schlitten entfernt, wenn der Wichtel im Weihnachtseifer mit Geschenk mit einer Geschwindigkeit von 5 m/s und ohne Geschenk mit einer Geschwindigkeit von 3 m/s rennt?

Lösung:

Bei einer gleichförmigen Bewegung und den gleichen zurückgelegten Wege ist das Verhältnis der Geschwindigkeiten antiproportional zu dem Verhältnis der entsprechenden Zeiten. Deswegen stehen die Zeiten für die Wege mit dem Geschenk und ohne das Geschenk im Verhältnis $\frac{5}{3}$ und betragen entsprechend $\frac{5\cdot 20\cdot 60}{8}$ und $\frac{3\cdot 20\cdot 60}{8}$ Sekunden. Das Geschenkelager ist vom Schlitten $\frac{3\cdot 20\cdot 60}{8}\cdot 5 = 2250$ Meter entfernt.

9. Dezember 2015

Cornelius Kruse

Rentiere mögen Lebkuchen

An 10 Rentiere wurden 56 Lebkuchen verfüttert. jedes Männchen bekam vom Weihnachtsmann 6 Lebkuchen für die harte Arbeit, jedes der zierlicheren Weibchen bekam 5 Lebkuchen. Wie viele Männchen hatte der Weihnachtsmann und wie viele Weibchen?

Lösung:

Um die Lösung zu erhalten, müssen wir erst einmal in Erfahrung bringen, wie viele Männchen der Weihnachtsmann haben musste, damit eine durch fünf teilbare Zahl Lebkuchen übrig blieb. Das heißt, wie viele Männchen bekamen sechs Lebkuchen, damit noch so viele Lebkuchen übrig blieben, dass man sie gleichmäßig in fünfer Paketen an die Weibchen verfüttern konnte. Wenn nun sechs Männchen sechs Lebkuchen fraßen, waren das insgesamt 36. Abgezogen von den 56 vorhandenen blieben noch 20 über, welche an genau vier Weibchen verteilt wurden. In Folge gab es sechs männliche und vier weibliche Rentiere.

10. Dezember 2015

Cornelius Kruse

Enkelsohn, sein Vater und sein Opa

Klaus Pfiffig sitzt neben seinem Opa an der Kaffeetafel an einem Tag in der Adventszeit und als er sich zu langweilen beginnt, fragt er den alten Mann, ob er nicht eine Knobelaufgabe kennt. "Weißt du wie alt ich bin," fragt der Opa, "oder, wie alt dein Vater ist?" Klaus schüttelt den Kopf, er ist doch kein Mädchen, die können sich aus unerfindlichen Gründen alle Geburtstage merken, er jedenfalls nicht. "Nun gut, dann werde ich dich das ausrechnen lassen," beginnt der Opa und fährt fort: "Wüsstest Du das Alter deines Vaters, müsstest du nur die beiden Ziffern vertauschen und hättest mein Alter, aber nun brauchst du noch eine weitere Information: In zwei Jahren bin ich dreimal so alt, wie dein Vater jetzt ist. So, und nun kannst du ein wenig knobeln!"

Lösung:

Schreiben wir den Alter vom Opa in der Form $\overline{ab} = 10a + b$, wobei a und b die Werte von 0 bis 9 annehmen können. .Dann ist der Alter vom Vater $\overline{ba} = 10b + a$. In zwei Jahren gilt $10a + b + 2 = 3 \cdot (10b + a)$. Daraus folgt $7a + 2 = 29b$. Die Zahl $7a + 2$ ist durch 29 teilbar. Das gilt nur für $a = 8$. Daraus folgt $b = 2$ und der Opa und der Vater sind 82 und 28 Jahre alt.

11. Dezember 2015

Knut Reindl

Drei Wichtel

Der Wichtel Paul hatte drei Plätzchen, und der Wichtel Peter vier. Der Wichtel Jonathan schloss sich ihrem Mahl an, indem er ihnen 7 Wichteltaler bezahlte. Alle aßen eine gleich große Portion. Wie muss das Geld auf Paul und Peter verteilt werden?

Lösung:

Da alle gleich viel gegessen hatten, muss jeder (3+4)/3=7/3Plätzchen gegessen haben.
Der Wichtel Jonathan zahlt für jeweils 1/3Plätzchen einen Wichteltaler.
Von seinen Plätzchen hat Paul 7/3 selber gegessen hat also 2/3 hergegeben sollte also 2 Wichteltaler bekommen.
Demnach hat Peter von seinen 12/3 Plätzchen auch 7/3 selbst verzehrt, gab 5/3 dem dazugekommenen Wichtel Jonathan und kriegt somit 5 Wichteltaler.

12. Dezember 2015

Gänse Schwarm

Ein Gänse Schwarm flog über einige Seen. An jedem See blieb die Hälfte der Gänse und noch ein Halb der Gans. Nach dem siebten See war der gesamte Schwarm verteilt. Wie viele Gänse waren am Anfang im Schwarm?

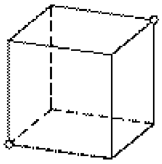
Lösung:

Am letzten See sind die Hälfte der Gänze und noch ein Halb der Gans geblieben und niemand flog weiter. Das bedeutet, dass ein Halb der Gans gleich der Hälfte der Gänze vor dem letzten See ist. Also, zum letzten See ist 1 Ganz angeflogen. Vom 6. See ist der gleiche

Gänze weggeflogen und deswegen betragen 1,5 Ganz die Hälfte der Gänze, die zum 6. See angeflogen sind. Also, zum 6. See sind drei Gänze angeflogen. Und so weiter ...
Zum 1. See sind 127 Ganze angeflogen.

13. Dezember 2015

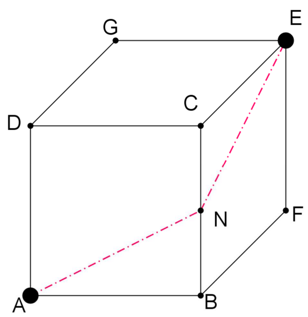
Eine Raupe auf einem Geschenk

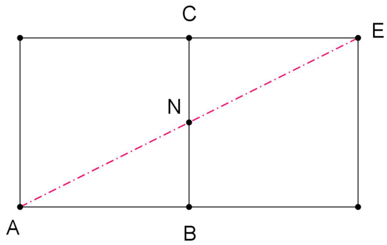


Auf einem Tisch liegt ein quaderförmiges Geschenk. Eine Raupe möchte auf der Oberfläche eines quaderförmigen Geschenks von einer Ecke (links unten auf dem Tisch) in die gegenüberliegende Ecke (oben rechts) gelangen. Finde den kürzest möglichen Weg für die Raupe.

Lösung:

Die kürzeste Verbindung zweier Punkte ist die Strecke zwischen den beiden Punkten. Wenn wir das Geschenk entlang die Kante CB aufklappen, erhalten wir das Rechteck. Die Strecke AE ist die Kürzeste Verbindung. Diese Strecke schneidet die Kante CB in seiner Mitte N.
Die Raupe soll in der vorderen Fläche gerade bis zur Mitte der Kante kriechen und danach in der rechten Fläche gerade zum Ziel kommen.





Theoretisch könnte die Raupe warten, bis sie zum Schmetterling wird und dann die Raumdiagonale nehmen, oder außen herum fliegen.

Entweder, die Raupe nimmt irgend einen Weg, denn alle sind gleich lang, oder sie frisst sich durch das Geschenk, was ja auch gehen würde. ☺

14. Dezember 2015

Geschichte einer Schnecke

Eine Schnecke klettert während eines Tages 3 cm an einem Pfosten hoch. Bei Nacht jedoch schläft sie und rutscht jedes Mal 2 cm wieder herunter. Der Pfosten ist 10 m hoch und ganz oben befindet sich ein leckeres Schnecken Bonbon. Die Schnecke hat am 1. Advent 2015 angefangen, hoch zu klettern. Wird die Schnecke es schaffen, in der Adventszeit das Bonbon zu erreichen? Falls nein, an welchem Datum erreicht sie das Bonbon?

Lösung:

Der Pfosten ist 1000 cm hoch und die Schnecke wird nach 997 Tage und Nächte 3 cm vom Bonbon entfernt. Am Abend des 998. Tages wird sie das Bonbon fressen dürfen.
Der 1. Advent des Jahres 2015 war am 29. November. Es gilt $998 = 366 + 365 + 267$.
Deswegen wird die Schnecke das Bonbon am 267. Tag nach dem 29.11.2017 erreichen.
$267 = 1\ (November) + 31\ (Dezember) + 31\ (Januar) + 28\ (Februar) + 31\ (März) + 30\ (April) + 31\ (Mai) + 30\ (Juni) + 31\ (Juli) + 23\ (August)$. Die Schnecke wird das Bonbon nicht in der Adventszeit, sondern am 23. August 2018 erreichen.

15. Dezember 2015

Cornelius Kruse

Schlitten mit Geschenke

In zwei Schlitten sind 30 Geschenke. Als aus dem ersten Schlitten 2 Geschenke in den zweiten Schlitten gelegt wurden, lagen im ersten Schlitten plötzlich nur noch halb so viele Geschenke wie im zweiten Schlitten. Wie viele Geschenke lagen in jedem Schlitten am Anfang?

Lösung:

Wenn in einem Schlitten gegen Ende noch halb so viele Geschenke liegen sollte, dann muss man die Anfangsmenge in drei Teile aufteilen, von denen zwei im zweiten und einer im ersten Schlitten liegen müssen. Das heißt, zum Schluss lagen in Schlitten 2 immerhin schöne 20 Geschenke, doch in Schlitten 1 nur noch 10. Wenn man die beiden umverteilten Geschenke wieder zurück legt, kommt man zu dem Schluss, dass in Schlitten 1 zu Beginn 12 Geschenke lagen, sowie 18 weitere Geschenke in Schlitten 2 auf die Auslieferung warteten.

16. Dezember 2015

Eine Blume im LGH-Teich

In der Mitte eines rechteckigen Teiches auf dem LGH-Campus wächst jedes Jahr am 29. Mai eine Victoria-Regia-Blume. Ihr Stiel wächst vom Grund nach oben, die Blütenblätter liegen auf der Wasseroberfläche wie die einer Seerose. Die Oberfläche der Blume verdoppelt sich täglich, bis die Blütenblätter am 28. Juni die ganze Oberfläche des Teiches bedecken. Danach fallen die Blütenblätter ab und die Samen sinken auf den Grund.
An welchem Tag können die neugierigen LGH-ler beobachten, dass die Blume die Hälfte des Teiches bedeckt?

Lösung:

Am 28. Juni ist das doppelte der Oberfläche vom 27. Juni bedeckt. Deswegen können die neugierigen LGH-ler am 27. Juni beobachten, dass die Blume die Hälfte des Teiches bedeckt.

Die Ideen für einige Aufgaben sind aus den Büchern „Mathe AG für die Klassen 6 und 7“ von A. V. Spivak (Übersetzung aus dem Russischen von Yaroslav Taran und Nikita Herr) und „Denkaufgaben für Kinder von 5—15 Jahren“ von Wladimir Igorewitsch Arnold entnommen worden.