



12 Aufgaben mit Lösungen



Lucia Schmid
Leonie Töpert
Dr. Olga Lomonosova
Dr. Albert Oganian

haben die Aufgaben und Lösungen vorbereitet.

Schuljahr 2012/2013



1. Dezember 2012

Lucia Schmid

Damals...

Meine Großmutter sagt, dass ihr schönstes Weihnachten war, als sie 52 Jahre alt geworden ist, zu der Zeit war meine Mutter 24 und mein Onkel 18 Jahre alt, weil sie dort erfahren hat, dass meine Mutter mit mir schwanger war. Mein Onkel, der ein Fable für mathematische Knobeleyen hatte, sagte mir darauf, dass sein schönstes Weihnachten war, als er und meine Mutter zusammen genauso alt waren, wie meine Großmutter zu der Zeit war, weil er dort erfahren hat, dass seine Frau mit meiner Cousine schwanger war. Wie viel Zeit verging zwischen den beiden Weihnachten?

Lösung:

Sei x die Anzahl der Jahre, die zwischen den beiden Weihnachten vergangen sind. Dann gilt:
 $24 + x + 18 + x = 52 + x$, $x=10$ und demnach sind 10 Jahre vergangen.

2. Dezember 2012

Lucia Schmid

Prüfung zum Weihnachtself

Jeder Weihnachtself muss beim Weihnachtsmann für seinen Einsatz eine Prüfung ablegen. Dieses Jahr hat der Weihnachtsmann die 30 Aufgaben so konzipiert, dass eine korrekte Antwort 7 Punkte bringt, eine fehlende oder eine falsche Antwort 12 Punkte Abzug gibt. Weihnachtselfanwärterin Ina hat 77 Punkte.

Wie viele Aufgaben fehlen ihr bzw. sind falsch?

Lösung:

Wenn sie nichts falsch oder fehlend hätte, hätte sie $30 \cdot 7 = 210$ Punkte, doch sie hat nur 77 Punkte. Zwischen einer Aufgabe, die man richtig hat und einer Aufgabe die fehlt oder die man falsch hat, besteht ein Unterschied von 19 Punkten. Sei x die Anzahl der fehlenden bzw. falsch gelösten Aufgaben. Dann gilt: $210 - 19 \cdot x = 77$. Daraus folgt: $x = 7$.



3. Dezember 2012

Leonie Töpert

Wichtelstreit

Vier Wichtel streiten sich über das Alter vom Sohn des Weihnachtsmannes. Sie konnten sich nicht auf ein Ergebnis einigen:

Der Erste schätzte ihn auf 39, aber das fanden alle anderen viel zu alt. Der Zweite meinte daraufhin, dass er 24 Jahre alt sein müsse, was den anderen aber zu jung erschien. Daraufhin schätzten der Dritten und der Vierten den Sohn auf 27 und 31 Jahre.

Der Weihnachtsmann hatte genug von den Diskussionen und gab ihnen einen Hinweis:

Alle von euch liegen falsch, aber eine Vermutung war nur um ein Jahr, eine andere um 3 Jahre, die nächste um 6 Jahre und die abwegigste um 9 Jahre falsch.

Finde das Alter des Weihnachtsmanns Junior heraus und begründe Deine Antwort mit Hilfe von Gleichungen.

Lösung:

Da das Alter des Weihnachtsmanns Junior zwischen 39 und 24 Jahren liegt, muss die Summe der zwei Korrekturzahlen zu diesen Vermutungen $39-24=15$ ergeben. Das ist nur für $9+6=15$ möglich.

Somit haben wir $39-9=24+6=27+3=31-1=30$. Der Weihnachtsmanns Junior ist 30.

4. Dezember 2012

Leonie Töpert

Schneemanndilemma

Maximilian hat 200 Schneemänner gebaut. 99% der Schneemänner haben eine blaue Mütze auf. Wie viele Schneemänner muss er abbauen, bis nur noch 98% der Schneemänner blaue Mützen aufhaben?

Anmerkung: Es soll nur mit ganzen Zahlen gerechnet werden.

Lösung:

Max möchte also ein Prozent weniger Schneemänner mit blauen Mützen haben. Ein Prozent von 200 ist 2. Also hat er zunächst 198 Schneemänner mit blauen und 2 mit roten Mützen.

Baut er x Schneemänner mit blauen und y mit roten Mützen ab, so müssen $2-y$ Schneemänner mit roten Mützen 2% sein. Somit ist es möglich:

- 1) $y=0$. Zwei Schneemänner mit den roten Mützen machen 2% aus. Deswegen gibt es insgesamt 100 Schneemänner und 98 davon mit blauen Mützen. D.h. 100 Schneemänner mit blauen Mützen wurden abgebaut.



- 2) $y=1$. Ein Schneemann mit der roten Mütze macht 2% aus. Deswegen gibt es insgesamt 50 Schneemänner und 49 davon mit blauen Mützen. D.h. 149 Schneemänner mit den blauen und ein mit der roten Mütze wurden abgebaut.

5. Dezember 2012

Leonie Töpert

Sternenzauber

Ein kleiner Wichtel soll für den Weihnachtsbaum 4 gleichfarbige Sterne holen. Also geht er in die Vorratskammer, dort muss er aber feststellen, dass das Licht nicht mehr funktioniert. Er weiß aber, dass in der Truhe 10 rote Sterne und 10 goldene sind. Wie viele Sterne mindestens muss er mitbringen bis er ganz sicher 4 gleichfarbige hat?

Lösung:

Wen es für den kleinen Wichtel richtig schlimm läuft, zieht er die Farben immer abwechselnd. Im schlimmsten Fall zieht er also so: 1 roter Stern, 1 goldener, ein roter, ein goldener, ein roter, ein goldener. Damit hat er schon 6 Sterne gezogen. Der 7. Stern, den er zieht, kann jetzt rot oder golden sein. Damit hätte er entweder 4 rote Sterne oder 4 goldene. Er muss mindestens 7 Sterne mitbringen.

6. Dezember 2012

Lucia Schmid

Unsere Weihnachtselfin Lilly braucht Hilfe, denn der Weihnachtsmann hat sie beauftragt die Transportkosten für die Geschenke nach Engelland auszurechnen. Denn der Weihnachtsmann hat ganz viele Schlitten, die von Rentieren gezogen werden, die je nach Erfahrung, Position und Zugkraft mit Apfelstückchen „bezahlt werden“. Engelland ist nur ein kleines Land und deshalb ist der Schlitten nicht sonderlich schwer und es werden nur zwei Rentiere benötigt. Die Rentiere heißen Rudolf und Horstings. Rudolf ist schon ziemlich lange dabei, wird er noch nach der alten

deshalb Art bezahlt: er bekommt die ganzen Apfelstücke im Jahr auf einmal für alle Fahrten, diese belaufen sich dieses Jahr auf

$215\frac{9}{16}$ Äpfel. Lilly weiß, dass er für alle Fahrten außer der Fahrt

nach Engelland $208\frac{3}{4}$ Äpfel bekommt. Außerdem weiß sie, dass





Horstdings für diese Fahrt einen halben Apfel bekommt. 1 Apfel kostet $\frac{0,005}{0,0001}$ Weihnachtstaler.

Erkläre, wie wir auf folgende Formel für die Transportkosten kommen, und berechne die Transportkosten mit der Angabe der einzelnen Zwischenschritte.

$$\frac{215\frac{9}{16} - 208\frac{3}{4} + 0,5}{0,0001 : 0,005}$$

Lösung:

$215\frac{9}{16} - 208\frac{3}{4}$ Äpfel für Rudolf für die Fahrt nach Engelland.

0,5 Äpfel für Horstdings für die Fahrt nach Engelland.

$215\frac{9}{16} - 208\frac{3}{4} + 0,5$ Äpfel für die beiden für die Fahrt nach Engelland.

0,0001:0,005 Anzahl der Äpfelstücke, die man für einen Weihnachtstaler bekommt.

$$\frac{215\frac{9}{16} - 208\frac{3}{4} + 0,5}{0,0001 : 0,005} \text{ Kosten der notwendigen Äpfelmenge.}$$

Berechnung:

$$\begin{aligned} \frac{215\frac{9}{16} - 208\frac{3}{4} + 0,5}{0,0001 : 0,005} &= \frac{215 - 208 + \frac{9}{16} - \frac{12}{16} + \frac{8}{16}}{1 : 50} = \left(7 + \frac{5}{16}\right) \cdot 50 = \\ 350 + \frac{5 \cdot 50}{16} &= 350 + \frac{5 \cdot 25}{8} = 350 + \frac{125}{8} = 350 + 15\frac{5}{8} = 365\frac{5}{8} \end{aligned}$$

Die Transportkosten nach Engelland belaufen auf $365\frac{5}{8}$ Weihnachtstaler.

7. Dezember 2012

Lucia Schmid

Weihnachtskoblde, Engel und Weihnachtselfe

Unter 4 Weihnachtskobolden hat sich 1 Weihnachtself gemischt, du weißt aber nicht wer. Du weißt nur, dass alle Weihnachtskoblde lügen und alle Weihnachtselfe die Wahrheit sagen. Wer ist die Weihnachtself?



Stoppenklop:

„Jeder Engel ist kleiner als gewisse Weihnachtselke und alle Weihnachtselken sind kleiner als ein beliebiger Engel.“



Quinzel:

„Jeder Engel ist kleiner als gewisse Weihnachtselke und einige Weihnachtselke sind kleiner als ein beliebiger Engel.“



Rissel:

„Ein gewisser Engel ist kleiner als gewisse Weihnachtselken und jeder Weihnachtselke ist kleiner als ein beliebiger Engel.“



Molle:

„Ein gewisser Engel ist kleiner als jeder beliebiger Weihnachtselke und ein gewisser Weihnachtselke ist niedriger als jeder beliebiger Engel.“



Wussel:

„Alle bis jetzt getätigten Aussagen sind immer falsch.“

Lösung:

Weihnachtselke **Stoppenklop** lügt auf jeden Fall, da wenn alle Weihnachtselke kleiner sind als ein beliebiger Engel, können nicht gewisse Weihnachtselke größer sein als jeder Engel.

Weihnachtselke **Quinzel** kann Recht haben, da es gewisse Weihnachtselke geben kann, die größer sind als jeder Engel und einige Weihnachtselke, die kleiner sind als jeder Engel.

Weihnachtselke **Rissel** lügt auf jeden Fall, da wenn alle Engel größer sind als jeder Weihnachtselke, können nicht gewisse Weihnachtselke größer sein als ein gewisser Engel.

Weihnachtselke **Molle** lügt auf jeden Fall, da der Engel der kleiner ist als jeder beliebige Weihnachtselke, kann nicht auf einmal größer sein, als ein gewisser Weihnachtselke, der niedriger ist als jeder beliebiger Engel.

Weihnachtselke **Wussel** lügt, da Weihnachtselke **Quinzel** nicht auf jeden Fall lügt.

Quinzel ist der Weihnachtselke.



8. Dezember 2012

Leonie Töpert

Auf die Verpackung kommt es an!

Die Wichtel des Weihnachtsmannes haben ein Problem und zwar ein gewaltiges. Morgen muss die erste Ladung Geschenke abgeschickt werden, damit sie auch ja rechtzeitig ankommen. Aber die von ihnen produzierte Verpackung ist viel zu klein. Also müssen sie einen neue machen. Der Karton soll würfelförmig sein, in den Karton sollen ein Lolli (3 cm^3), ein Spielzeugauto (21 cm^3) und ein paar Schuhe (40 cm^3) passen. Gib die Seitenlängen des Kartons an.

Lösung:

Man zählt die Volumina zusammen und erhält 64 cm^3 . Da die Verpackung würfelförmig sein soll, ist seine Seitenlänge 4 cm .

9. Dezember 2012

Leonie Töpert

Der Nikolaus verteilt Nüsse und Schokolade

Der Nikolaus verteilt Nüsse und Schokolade auf ein 4×4 Brett. Er macht das so, dass in jeder waagerechten und in jeder senkrechten Spalte verschieden viele Leckereien liegen. Auch hat er für die bösen Kinder ein paar Felder leer lassen, und für jedes besonders brave Kind darf er mehr als eine Leckerei auf ein Feld legen. Was ist die kleinste Zahl an Leckereien, die er dafür braucht?

Lösung:

Da ein 4×4 Brett 8 Reihen enthält und jede Reihe eine andere Anzahl von Leckereien inklusiv 0 enthalten muss, so entsteht die kleinste Anzahl von Leckereien, wenn man die 8 kleinsten ganzen Zahlen von 0 bis 7 verwendet. Die Summe dieser Zahlen ergibt 28. Da aber jede diese Zahl zu zwei Reihen gehört und somit zwei Mal gezählt wurde, ist 14 die kleinste Anzahl von Leckereien. Hier ist eine mögliche Verteilung:

0	0	0	1
0	0	1	1
0	2	1	2
0	1	2	3



10. Dezember 2012

Lucia Schmid

Bevor unsere Weihnachtselke Lilly ihr 10. Türchen öffnet, möchte sie ihre bisherigen 9 Türchen/Säckchen so anordnen in einem Quadrat 3x3, dass die Summe der Tagesnummern in jeder Zeile, Spalte und Diagonale gleich groß ist. Zeige alle 8 Möglichkeiten auf, wie Lilly ihre 9 Säckchen anordnen kann, damit sie ihr 10. Türchen öffnen kann



Lösung:

In jeder Reihe/Spalte/Diagonale muss die Summe 15 betragen, da $1+2+3+4+5+6+7+8+9=45$ und $45/3=15$. 9 und 1 sind die einzigen Zahlen, die nur in zwei Summen vorhanden sein können: $1+8+6$ und $1+9+5$; $9+1+5$ und $9+2+4$. Es gibt nur vier Felder, die in nur zwei Summen beitragen.

8	3	4
1	5	9
6	7	2

6	7	2
1	5	9
8	3	4

4	3	8
9	5	1
2	7	6

2	7	6
9	5	1
4	3	8

8	1	6
3	5	7
4	9	2

6	1	8
7	5	3
2	9	4

4	9	2
3	5	7
8	1	6

2	9	4
7	5	3
6	1	8

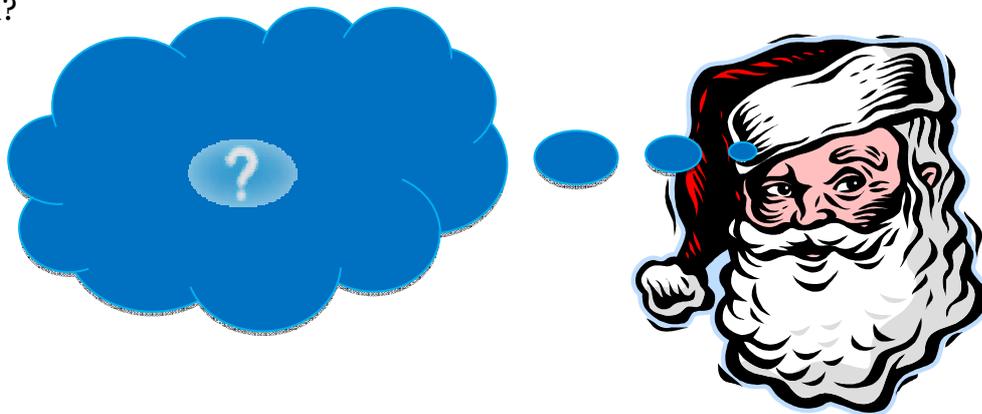


11. Dezember 2012

Lucia Schmid

Weihnachtsgeschenkmaschine

Die Weihnachtsgeschenkmaschine ist kaputt und der Weihnachtsmann ist richtig verzweifelt. Er möchte wissen, wer sie kaputt gemacht hat. Leider sind die Augen unseres Weihnachtsmannes sehr schlecht: Er kann Weihnachtselfen (sagen immer die Wahrheit) und Weihnachtskobolde (lügen immer) nicht unterscheiden. Er verhört alle 17 Angestellten, die zu der Zeit da waren (nur Weihnachtselfen und Weihnachtskobolde). Der zweite und jede folgende Person sagt aus, dass die vor ihr befragte Person gelogen habe. Nach der siebzehnten Person wird erneut die erste Person befragt, die nun behauptet, dass alle anderen gelogen hätten. Wie viele von den 17 sind Weihnachtselfen?



Lösung:

Wenn die erste Person ein Weihnachtself wäre, müssten alle anderen gelogen haben und damit Weihnachtskobolde sein. Aber weil demnach zum Beispiel auch die 15. gelogen haben muss, als sie gesagt hat, dass die 14. gelogen hat, muss demnach die 14. ein Weihnachtself sein, was jedoch nicht stimmen kann, wenn die erste Person ein Weihnachtself ist. Daher ist die erste Person ein Weihnachtskobold. Von den verbliebenen 16 müssen 8 Weihnachtselfe und 8 Weihnachtskobolde sein, da wenn wir einen Weihnachtskobold in der Reihe haben ein Weihnachtself darauf folgen muss und auf den Weihnachtself ein Weihnachtskobold usw. Daher haben wir schlussendlich 8 Weihnachtselfen.

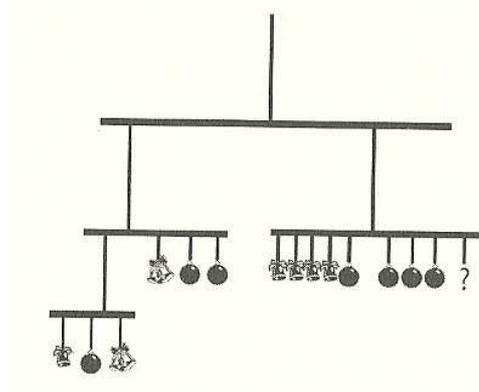


12. Dezember 2012

Aus dem Buch „Das neue Haus vom Nikolaus“ von Frank Schwellinger,

Weihnachtliches Gleichgewicht

Dieser Weihnachtsschmuck befindet sich im Gleichgewicht. Die waagrechten Stäbe haben alle das gleiche Gewicht. Die Schnüre wiegen nichts. Damit sich ein einzelner Stab im Gleichgewicht befindet, muss rechts und links jeweils das gleiche Gewicht hängen. Wo die Gewichte hängen, ob sie näher zur Schnur oder weiter weg davon sind, soll keine Rolle spielen. Gleiche Figuren wiegen auch gleich viel. An einer Stelle sehen Sie ein Fragezeichen statt der Figur, die sich dort befinden muss. Welche Figur muss an die Stelle des Fragezeichens?



Lösung:

x ist das Gewicht der kleinen Glocke; y ist das Gewicht der Kugel; z ist das Gewicht der großen Glocke;

s ist das Gewicht des Stabes; u ist das Gewicht an der Stelle des Fragezeichens.

Aus dem Gleichgewicht der Figur folgen die Gleichungen:

$$(1) x+y=z$$

$$(2) x+y+z+s= 2y+z$$

$$(3) 4x+y=3y+u$$

$$(4) x+3y+2z+s=4x+4y+u$$

Aus (1) und (2) folgt (2a) $z+s = 2y$

Aus (3) folgt (3a) $4x=2y+u$

Aus (4) folgt (4a) $2z+s=3x+y+u$

Aus (1), (2a) und (4a) folgt (4b) $z+2y= 2x+z+u$ oder $2y=2x+u$

Aus (3a) und (4b) folgt $4x-u=2x+u$ oder $u=x$.

Antwort: An der Stelle des Fragezeichens muss eine kleine Glocke hängen.