ITYM St. Petersburg

Dr. Albert Oganian

Vom 04.07 bis 11.07.2016 fand in St. Petersburg das 8. ITYM (International Tournament of Young Mathematicians) statt. Dabei befanden sich unter den zwei deutschen Teams auch drei Schüler des LGHs. Der Wettbewerb, welcher auch als die „Mathe-WM“ bezeichnet wird beschäftigt sich dabei mit 10 großen, bisher ungelösten Problemen der Mathematik, die schon lange im Voraus veröffentlicht werden. In den einzelnen Runden werden dann die Lösungen der unterschiedlichen Mannschaften diskutiert - dieses Jahr nahmen Teams aus den Ländern Bulgarien, Brasilien, Deutschland, Frankreich, Rumänien, Russland und Weißrussland teil.

Am Montag, dem 4. Juli ging es los am Frankfurter Flughafen, von wo wir nach St. Petersburg flogen. Dort trafen wir Stephanie Herold, unsere Team Leaderin, sowie Maximilian Hippold und Elena Weißer aus Rosenheim, mit denen wir das Team „Germany 1“ bildeten. Außerdem war noch Luka Kastner aus Berlin in unserem Team vertreten. Nachdem wir im verregneten St. Petersburg ankamen fuhren wir mit dem Bus ins Hotel, von wo wir dann in letzter Minute noch die Berichte über die Arbeit der anderen Teams einsenden mussten. In jeder Runde des ITYMs treten nämlich drei Teams gegeneinander an, wobei eines seine Lösung präsentiert, welche die anderen beiden zu kritisieren und hinterfragen haben.

Nach viel zu wenig Schlaf und einem „interessanten“ russischen Frühstück trafen wir unseren Guide, Polina, die uns zur Schule, in welcher sich der Wettbewerb abspielt, führte. Dort fanden dann zuerst das Quiz und darauf die Eröffnungszeremonie statt. Im Quiz geht es darum zu zeigen, dass man allgemeines Wissen zu den 10 Problemen des ITYMs aufweist. Es handelt sich um einen schriftlichen Test von zwei Stunden, bei dem aber keine Hilfsmittel erlaubt sind. Da hierbei alle Teammitglieder zusammen in einem Raum arbeiten ist es wichtig, sich entsprechend zu koordinieren und die Aufgaben geschickt aufzuteilen. In der folgenden Eröffnunszeremonie wurde dann das ITYM offiziell begonnen. Verschiedene Organisatoren aus den Teilnehmerländern erzählten von ihrer Arbeit und auch alle Teams stellten sich und ihr Land kurz vor. Im Anschluss gab es Mittagessen und darauf sollte dann die erste Runde beginnen.

Mit einer Punktzahl von 0.95 wurden wir als Team „Germany 1“ in das zweite kleine Finale eingeteilt. Wir erhielten die Aufgabe 5 bei den letzten Ziehungen. Zusammen mit Team „Romania“ und „Russia 1“ trug Luca die Ergebnisse vor. Die rumänische Mannschaft überzeugte durch anschaulich dargestellte Lösungen und einen sehr verständlichen Vortragsstil. Nach dem Absprechen der Jury endete der Tag relativ früh nach dem Mittagessen. Am nächsten Morgen fand die Schließungszeremonie statt. Ein russischer Mathematiker eröffnete die Veranstaltung mit einem Vortrag über die Grundlagen der komplexen Zahlendefinition und ihrer Geschichte. Danach stellte Prof. Dr. Schleicher die Jacobs University in Bremen vor, was von Abschlussreden der anderen

Lehrkräfte und Organisatoren gefolgt war. Die Endergebnisse wurden über den Projektor und die Moderation durch Dr. Zmiaikou bekannt gegeben. Den ersten Platz erhielte dem „France 3", welches als Preis mit Prof. Dr. Schleicher an einer weiteren mathematischen Veranstaltung in naher Zukunft teilnehmen werden. Unser Team erhielt eine besondere Anerkennung und Yifeng gewann den Preis für den besten Teamcaptain aufgrund seiner Disposition zur Mathematik. Die Feier wurde von einem Buffet gefolgt welches bis in die Abendstunden reichte. Am nächsten Morgen fuhren wir gemeinsam mit dem anderen deutschen Kontingent, welches einen zweiten Platz erreichte, um 8.00 Uhr mit dem Bus wieder zum Pulkovo Flughafen ab. In Frankfurt gingen dann alle Mitglieder der Teams getrennte Wege.

Die Aufgaben

Unser Team hat in der ersten Runde die Aufgabe 6 vorgeführt. Da ging es um gewisse Paare von Folgen, die miteinander "gekoppelt" sind. Die Folgen sind durch zwei Funktionen $M(a,b), N(a,b)$ mit $a,b \in \mathbb{R}^+$ dargestellt, wobei $a_n = M(a_{n-1}, b_{n-1})$ und $b_n = N(a_{n-1}, b_{n-1})$. Das heißt, dass ein gewisses Glied einer Folge in der Folgenpaar durch die Anwendung der Funktion auf die letzten zwei Gliede beschrieben wird. Der Titel der Aufgabe lautet "Different Means" (Verschiedene Mittelwerte), uns interessiert also solche Funktionen M und N, die einen Mittelwert der Argumente liefern, also $a < M(a,b) < b$ und $a < N(a,b) < b$. Der Schwerpunkt der Untersuchung liegt auf dem gemeinsamen Grenzwert der Folgen, also wenn $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$, dann wird dieser Grenzwert als $M \otimes N(a,b)$, "Mean-product" definiert. Wir haben bewiesen:

$$A \otimes H(a,b) = \sqrt{ab}, \text{ wobei } A(a,b) = \frac{a+b}{2}, H(a,b) = \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$$

$$A \otimes G(a,b) = \frac{\pi}{2}\left(\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}}\,dx\right)^{-1}, G(a,b) = \sqrt{ab}$$

$$H \otimes G(a,b) = \left(A \otimes G\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}\right)\right)^{-1}$$

Verallgemeinerungen und weiterführende Fragen wurden auch bearbeitet.

In der zweiten Runde haben wir die Aufgabe 7 präsentiert. Bei dieser Aufgabe geht es um ein Spiel, in dem die Spieler versuchen, einen Ring schwarz oder weiß zu färben. Die Spieler wählen alternierend die Länge und Position eines Bogens. Alle Farben der Punkte des Rings in diesem Bogen werden dann invertiert. Unser Team hat hier viele verschiedene Einzelfälle betrachtet, aber auch Verallgemeinerungen versucht.

In der Finale haben wir die Aufgabe 5 präsentiert, wobei es diesmal darum ging, ob man ein Vieleck mit eine Menge von Geraden, die alle zueinander entweder parallel oder senkrecht stehen in nur rechtwinklige Dreiecke oder Rechtecke teilen kann. Unser Team musste die Bedingungen für die „Zusammengesetztheit" verschiedener Formen untersuchen und beweisen.

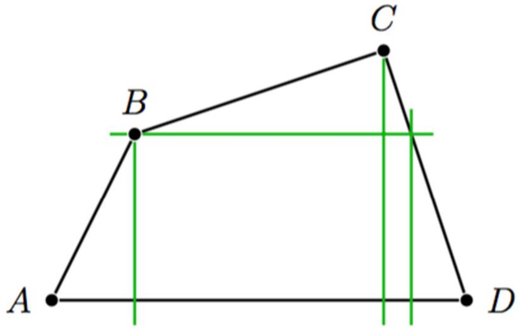

FIGURE 2. A convex quadrilateral $ABCD$ divisible by its side AD.

Alice and Bob play a game on a circle of circumference 1. Initially, the circle is completely white. In each step, one player picks a real number $t \in [0, 1]$ and the other chooses an arc of length t. All white points in the chosen arc become black and all black points become white. The players pick numbers alternately, starting with Alice. The game stops after n steps, where $n \in \mathbb{N}$ is given in advance. In the end, Alice's gain, denoted by G_A, is the proportion of points which are white. Bob's gain, denoted by G_B, is the proportion of points which are black.

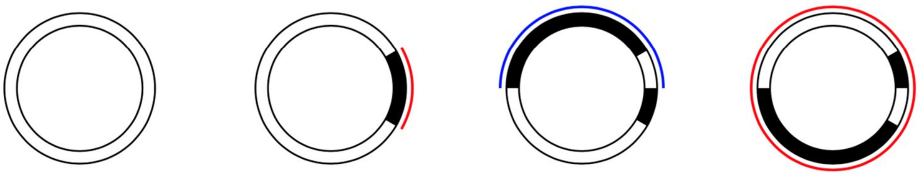

FIGURE 3. An example with $n = 3$. Alice picks $t = 1/6$ and Bob chooses an arc on the right. Then he picks $t = 1/2$ and Alice chooses an arc on the top. Finally Alice picks $t = 1$ and Bob chooses the entire circle. Here $G_A = G_B = \frac{1}{2}$.