Chronik

der

1. LGH - MATHE - SOMMERAKADEMIE

KEGELSCHNITTE

09.07.2009 - 15.07.2009

Jugendherberge Triberg

Teilnehmer

Dr. Olga Lomonosova

Rebecca Westphal
Carmen König
Matthias Böttger
Julius Ehrsam
Ruben Schiel
Stefan Jahn
Daniel Malz
Karla Markert
Franziska Dezember (nicht auf dem Foto)

Dr. Albert Oganian

Julius Greiner
Michael Sonner
Felix Mann
Marimel Mayer
Martina Enzinger
Laura Grunewald
Aaron Stumpf
Wolf-Xaver Merkt
Andreas Mihatsch

Vorwort

Die 1. LGH-Mathe-Sommerakademie fand vom 09. bis zum 15. Juli 2009 im Triberg statt. Mit 18 SchülerInnen zusammen haben wir, Dr. Olga Lomonosova und Dr. Albert Oganian, uns intensiv mit dem Thema "Kegelschnitte" auseinandergesetzt. Das Thema ergänzt sehr gut den in diesem Schuljahr gelernten Stoff, bietet unzählige sowohl geometrische als auch algebraische Vertiefungsmöglichkeiten und ist nicht zuletzt einfach schön. Die intensive geistige Arbeit wurde durch das abwechselungsreiche kulturelle und sportliche Rahmenprogramm ergänzt. Hierzu zählten: eine Stadtführung in Triberg mit Besuch der Wohlfahrtskirche und dem holzgeschnittenen Rathhaussaal, eine Wanderung zu den größten Wasserfällen Deutschlands, Klettern im Hochseilgarten, eine Besichtigung des "Parks mit allen Sinnen" und der Rodelbahn im Gutach und Besuch am mathematischen Forschungsinstitut in Oberwolfach mit einer Führung durch den Assistenzdirektor Herrn Dr. Klaus und einem Vortrag zur Zahlentheorie von Herr Prof. Dr. Zagier, einem der bedeutesten Zahlentheoretiker unserer Zeit.
Beiden Herren sei an dieser Stelle für diese tolle Möglichkeit von uns allen ganz herzlich gedankt.
Eine ausführlichere Darstellung sowohl der fachlichen Inhalte als auch des Rahmenprogramms findet der Leser in dieser Dokumentation, die von den SchülerInnen während der Akademie geschrieben wurde.
An dieser Stelle möchten wir uns ganz herzlich bei allen bedanken, die diese Akademie ermöglicht haben, insbesondere bei der Schulleiterin Frau von Manteuffel. Ihre Idee, den Schülern und Schülerinnen die intensive Vertiefung eines Themas im Laufe einer Woche außerhalb der Schule - fernab vom " ablenkenden Alltag" - zu ermöglichen, kann nicht hoch genug geschätzt werden.
Auch die tatkräftige Unterstützung durch den stellvertretenden Schulleiter Herr Schödel, den Verwaltungsleiter Herr Höppel, den Hausmeister Herr Sachsenmeier und den Herrn von Manteuffel verdienen einen herzlichen Dank.
Unser Dank gilt dem Verständnis aller Kollegen, die uns in dieser Zeit vertreten haben.
Wir bedanken uns herzlich beim Förderverein unserer Schule für die finanzielle Unterstützung.
Natürlich möchten wir uns bei unseren Schülern und Schülerinnen für ihre begeisterte Teilnahme, das Engagement und die tolle Atmosphäre herzlichst bedanken und ihnen allen schöne und erholsame Ferien wünschen!

Abschließend möchten wir anmerken, dass diese Dokumentation in kürzester Zeit noch während der Akademie verfasst wurde und daher trotz aller Bemühungen den einen oder anderen Mangel aufweist. Wir bitte den Leser um Nachsehen und Verständnis und hoffen, dass er dennoch Vergnügen an der Lektüre finden wird.

Dr. Olga Lomonosova und Dr. Albert Oganian

Literatur: Harald Schneid: Elemente der Geometrie, Spektrum, Akad.Verl.,2001, Heidelberg, Berlin

1. Tag, Donnerstag, 09.07.09

Chronist: Julius Greiner

1 Allgemeiner Tagesablauf

1.1 Zugfahrt

Der erste Tag der aller ersten Mathe-Sommerakademie des LGH fing zum Verdruss unserer Sprachenlehrer schon gegen Ende der dritten 'Fundamentumsdoppelstunde' an: Wir, das heißt die Teilnehmer und unsere Betreuer und Lehrer Frau Lomonosova und Herr Oganian aßen schnell zu Mittag und gingen anschließend zum Bahnhof in Schwäbisch Gmünd. Der Regionalexpress fuhr um 13:54 Uhr und kam um 14:38 am Stuttgarter Hauptbahnof an. Dort angekommen ging es auch gleich um 14:59 Uhr weiter nach Karlsruhe. In Karlsruhe kamen wir minimal verspätet um 15:55 Uhr an und stiegen ein letztes Mal um in den Zug nach Triberg, der um 16:04 abfuhr und um 17:43 Uhr im schönen Schwarzwald ankam. Auf der Zugfahrt hatten einige von uns geschlafen oder gelesen, andere hatten geredet oder Musik gehört. Und Michael Sonner hatte sich sogar schon auf der Fahrt mit Ellipsen beschäftigt, so dass er den anderen in der ersten Mathe-Einheit des nächsten Tages den ersten Schritt erklären konnte. Abgeholt wurde unsere Gruppe von einem Bus, der uns direkt vor die Haustür der Triberger Jugendherberge brachte.

1.2 Abend

Nach einer vierstündigen Anreise konnten wir uns endlich unser einwöchiges Domizil am Rande des idylischen Schwarzwaldstädtchens Triberg beziehen und begutachten. Da wir um ca. 18:20 eintrafen, kamen wir gerade noch rechtzeitig zum Abendessen, das jede anwesende Gruppe in einem eigenen Raum einnehmen durfte. Nachtruhe bestand ab 23:00 Uhr und bis es soweit war und wir natürlich alle sofort einschliefen, konnten wir uns mit der Örtlichkeit vertraut machen. Neben den mathematischen Einführungen besprachen wir am Abend auch das Programm der anstehenden Woche im Schwarzwald.

2 Mathematik

Da es bereits etwas später am Abend war, wurde die 'nullte' Mathestunde eher eine kurze Einführung bzw. Einweisung in die Grundwerkzeuge zu Kegeln und Kegelschnitten, um auf die folgenden Tage vorbereitet zu sein:

Zwei Tangenten, die sich in einem Punkt P schneiden und den selben Kreis bzw. die selbe Kugel tangieren sind gleich lang, d.h. die Strecken vom Punkt P zu den Berührpunkten sind gleich lang.

Definition eines geraden Kegels:
Der gerade Kegel entsteht durch Rotieren einer Geraden um eine andere vertikale Gerade, wobei beide sich an einem Punkt S, dem Scheitelpunkt des Kegels, unter einem bestimmten spitzen Winkel φ, dem halben Öffnungswinkel des Kegels, schneiden.
Gegenstand all unserer Betrachtungen sind Schnittlinien, die durch das Schneiden einer Doppelkegel, d.h. Kegel, die sowohl nach oben und als auch nach unten geöffnet ist, mit einer nicht durch den Scheitelpunkt S gehenden Ebene entstehen.
Kegelschnitte sind in vier verschiedene Arten einzuteilen:

Abbildung 1: Kegelschnitte

1. Der Schnittwinkel der Schnittebene mit der Kegelachse ist 90° → es entsteht ein Kreis.
2. Der Schnittwinkel der Schnittebene mit der Kegelachse ist größer als der halbe Öffnungswinkel → es entsteht eine Ellipse
3. Der Schnittwinkel ist gleich groß wie der halbe Öffnungswinkel → es entsteht eine Parabel
4. Der Schnittwinkel ist kleiner als der halbe Öffnungswinkel → es entsteht eine Hyperbel

2. Tag, Freitag, 10.07.09

Chronisten: Martina Enzinger, Laura Grunewald, Marimel Mayer

3 Das Nachmittagsprogramm

Nach einem mathematisch geprägten Vormittag nahmen wir nach dem Mittagessen an einer Stadtführung teil. Aufgrund eines Missverständnisses verschob sich der Beginn der Führung leider von 13:00 auf 13:30. Der deutsch-französische Kunsthistoriker Wolf Henry Gissler erzählte uns zunächst einige allgemeine Fakten über die Stadt. Triberg ist im späten 11. Jahrhundert gegründet worden und war von Beginn an eine Stadt. Seitdem hat es in nahezu jedem Jahrhundert einen schwerwiegenden Brand gegeben, zuletzt 1826, was natürlich folgenschwere Auswirkungen auf die Bauwerke der Stadt hatte. Als Pilgerreisen nach dem 30-jährigen Krieg populär wurden, statteten sehr viele Menschen auf Marien-Wallfahrten Triberg einen Besuch ab. Trotz der geringen Einwohnerzahl lohnten sich deshalb zahlreiche Geschäfte wie 27 Metzgereien, 31 Bäckereien und 38 Gaststätten. Letztlich wurden aus diesem Grund auch die katholischen Kirche St. Maria in der Tanne errichtet. Sie stammt aus der Zeit des französischen Hochbarock. Wie typisch für diesen Stil, besteht die Decke nicht aus einem aufwendigen Gewölbe sondern aus einer Holzkassettendecke. Um den Innenraum möglichst hell zu gestalten und die wenigen, aber dafür umso kunstvoller gestalteten Werke hervorzuheben, sind die Wände weiß gestrichen und die Fenster aus durchsichtigem Glas. Beachtlich ist zum Beispiel die anatomische Korrektheit des Kruzifix, der über dem Altarraum hängt (Jesus ist an den Handgelenken ans Kreuz genagelt und die Verletzungen wirken realistisch.). An der linken und an der rechten Seite am Eingang des Altarraumes steht in der Höhe von 4 m je eine Figur, die unter Rücksichtnahme auf die verzerrte Perspektive konstruiert wurde, dass die Proportionen auf den Betrachter korrekt wirken. Erwähnenswert ist sicherlich auch die prächtig gestaltete Orgel, die wohl auch klanglich ein Genuss ist (allerdings kann ich dies nicht selbst bestätigen, da die Orgel während unseres Besuches nicht gespielt wurde). Aufgrund der niedrigen Decke wirkte sie leider etwas eingeengt.

Anschließend spazierten wir zu den bekannten Wasserfällen, angeblich den größten Deutschlands (bezogen auf den Höhendifferenz). Tatsächlich bot sich uns ein schönes Naturschauspiel, allerdings gibt es meiner Meinung nach Wasserfälle in ruhig gelegen Wandergebieten, die deutlich idyllischer wirken - aber das ist wohl eine Frage der persönlichen Vorlieben.

Zuletzt fanden wir uns im Rathaus ein, in welchem wir ganz alleine waren, da gerade Betriebsausflug war. Wir fanden uns in einem Raum ein, der heutzutage nur noch Repräsentationszwecken dient: die Wände sind mit kunstvollen Holzschnitzereien überzogen und selbst das Telefon ist dem Stil des Raumes angepasst. Ein Leuchter, der über dem Tisch hängt, durch den laut Hersteller den Beratschlagenden ein Licht aufgehen soll. Es gibt dort auch einen Trautisch, der an einen kirchlichen Altar erinnert. Ein Leuchter, auf dem ein Baum mit einer Schlange abgebildet ist und damit die Sündhaftigkeit des Menschen symbolisiert, Braut und Bräutigam ermahnen.

Nachdem die Führung um kurz nach halb vier beendet war, hatten wir noch Zeit, uns frei in der Stadt aufzuhalten, bis wir um 17:00 den Matheunterricht fortsetzten. Um kurz nach halb neun, als der mathematische Teil des Tages abgeschlossen war, konnte jeder den Abend nach seinen Interessen gestalten. So fanden sich einige in geselliger Runde zum Zeichnen, Werwolf oder Trio spielen zusammen, während andere lieber spazieren gingen oder lasen.

Insgesamt war es ein recht gelungener Tag.

4 Mathematik

4.1 Namensgebung

Alle Namen kommen aus dem Griechischen
Parabel: von paraballein = gleich
Hyperbel: von hyperballein = über
Ellipse: von elleipein = unter

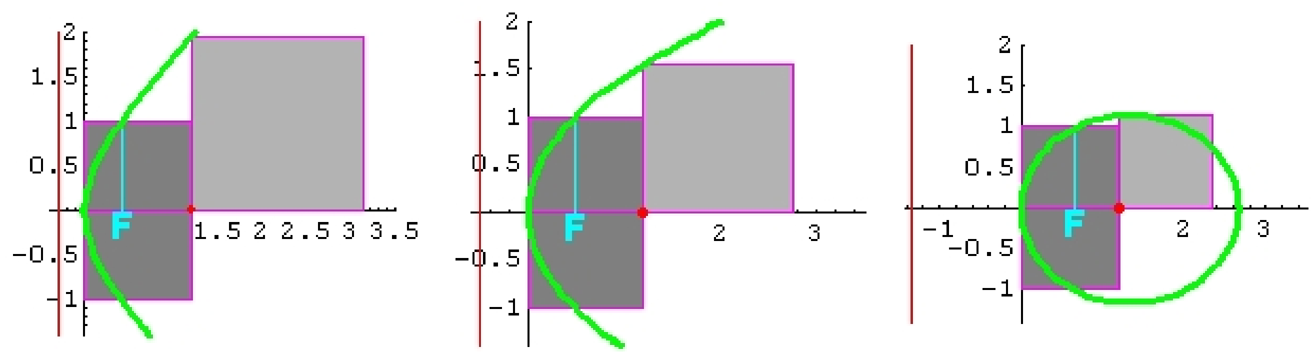


Abbildung 2: Namensgebung

4.2 Dandelinsche Kugeln

Jede Kugel berührt den Mantel in einem Kreis und die Schnittebene in einem Punkt

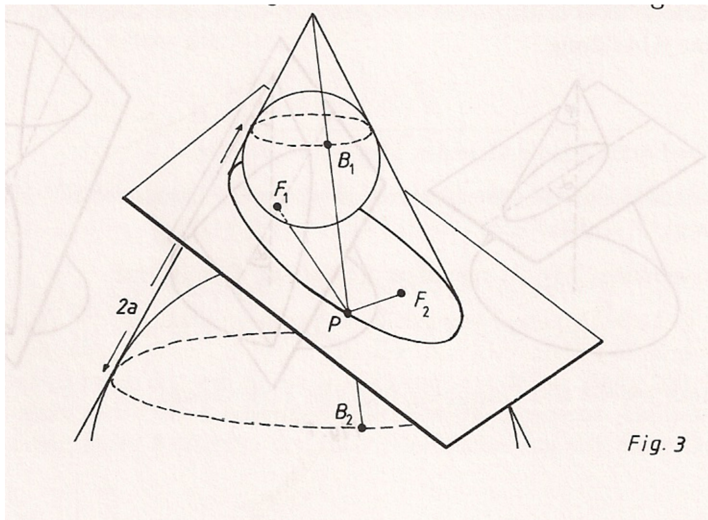


Abbildung 3: Ellipse mit 2 Brennpunkte

4.3 Eigenschaft einer Ellipse

Auf der Abbildung 3 ist P der Schnittpunkt der Ebene mit einer Mantellinie.
B_1, B_2 sind Berührpunke der Kugeln mit dieser Mantellinie.
F_1, F_2 sind Berührpunkte der Kugeln mit der Ebene,welche man Brennpunkte nennt.
$\overline{PF}_1 = \overline{PB}_1$, weil beide Tangenten zur oberen Kugel sind. Analog (untere Kugel) $\overline{PF}_1 = \overline{PB}_1$
$\overline{PF}_1 + \overline{PF}_2 = \overline{PB}_1 + \overline{PB}_2 = const = 2a, \forall P \in E$
Somit ist der Satz bewiesen: Ellipse ist geometrischer Ort aller Punkte einer Ebene, die zu zwei festen Punkten die gleiche Abstandssumme haben.

4.4 Fragen

Daniel: Gibt es Punkte im Raum, die diese Eingenschft besitzen?
Antwort: Ja, durch Rotation der Ellipse um die Hauptachse entsteht ein Ellipsoid, dessen Punkte diese Eigenschaften besitzen.
Andreas: Gibt es zu jeder Ortskurve mit dieser Eigenschaft einen Kegel und eine Ebene?

4.5 Herleitung der Mittelpunktellipsengleichung im kartesischen Koordinatensystem

Aus der Abbildung 4 folgt:

$$\overline{PF}_1 = \sqrt{y^2 + (x-e)^2}; \overline{PF}_2 = \sqrt{y^2 + (x+e)^2}; 2a = \sqrt{y^2 + (x-e)^2} + \sqrt{y^2 + (x+e)^2}$$

Durch Umformung:

$$y^2 = \frac{(a^2 + ex)^2}{a^2} - (x+e)^2; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - e^2} = 1 | a^2 - e^2 = b^2$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{1}$$

4.6 Winkel zwischen zwei Ebenen

Definition: s ist die Schnittgerade von zwei Ebenen E_1 und E_2, g_1 und g_2 sind Geraden, die senkrecht zu der Gerade s sind und entsprechend in den Ebenen E_1 und E_2 liegen. Die Winkelweite

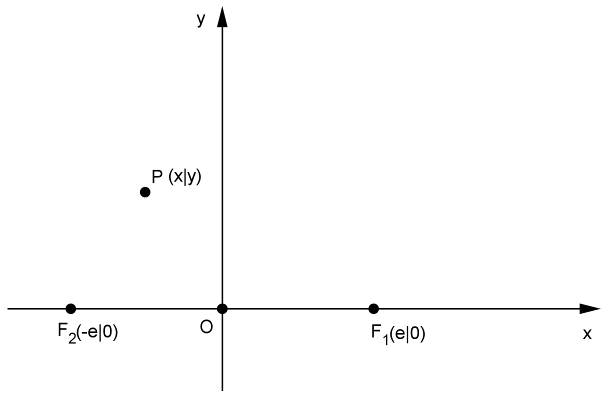


Abbildung 4: Mittelpunktsgleichung einer Ellipse im kartesischen Koordinatensystem

zwischen den Gerade g_1 und g_2 ist per Definition die Winkelweite zwischen den Ebenen E_1 und E_2.

4.7 Exzentrizität

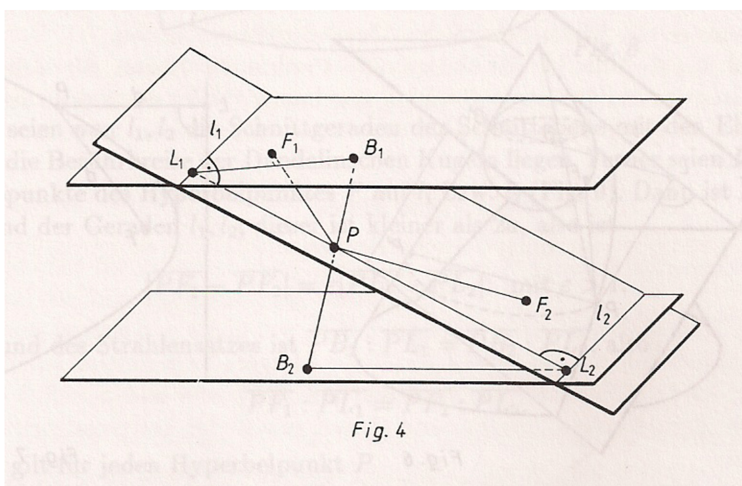


Abbildung 5: Leitgeraden

Definition: Die Schnittgerade der Ellipsenebene mit der Ebebe, in der der Berührkreis der Dandelinischen Kugel mit der Kegelmantel liegt, heißt Leitgerade der Ellipse.
Jede Ellipse besitzt zwei Leitgeraden, entsprechend zwei Dandelinischen Kugeln.
Satz. Für alle Punkte P einer Ellipse hat das Verhältnis der Entfernung von einem Brennpunkt zum Abstand von der zugehörigen Leitgerade einen festen Wert ϵ kleiner 1.
Beweis:
Aus der Abbildung 5 folgt:
$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a = \overline{PB}_1 + \overline{PB}_2 = \overline{B_1 B_2}$
$\overline{PF_1} = \overline{PB_1}$
$\overline{PF_2} = \overline{PB_2}$
ΔPB_1L_1 ist mit dem ΔPB_2L_2 ähnlich, da

$B_1L_1||B_2L_2$ ist.

$$\frac{\overline{PL_1}}{\overline{PL_2}} = \frac{\overline{PB_1}}{\overline{PB_2}} \Rightarrow \frac{\overline{PB_1}}{\overline{PL_1}} = \frac{\overline{PB_2}}{\overline{PL_2}} = \frac{\overline{B_1B_2}}{\overline{L_1L_2}} \Rightarrow \frac{\overline{PF_1}}{\overline{PL_1}} = \frac{\overline{PF_2}}{\overline{PL_2}} = \frac{\overline{B_1B_2}}{\overline{L_1L_2}} = \epsilon \tag{2}$$

Diese Zahl ϵ heißt Exzentrizität. Für die Ellipse gilt $\epsilon < 1$, was später bewiesen wird.

4.8 Herleitung der Scheitelgleichung

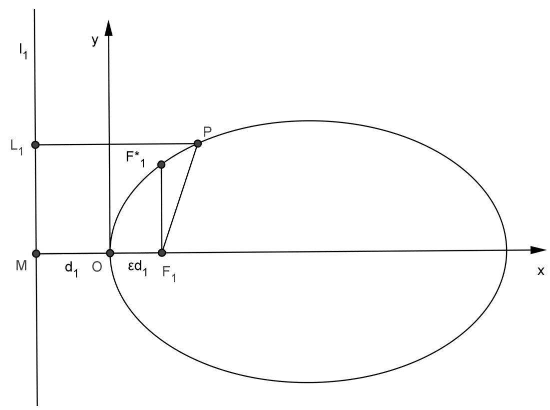


Abbildung 6: Leitgeradengleichung

Gegeben: ϵ, F_1, l_1

$$\frac{\overline{F_1O}}{\overline{OM}} = \epsilon; \overline{MO} = d_1; \overline{F_1O} = \epsilon d_1; \frac{\overline{PF_1}}{\overline{PL_1}} = \epsilon$$

$$\overline{PL_1} = x + d_1; \overline{PF_1} = \sqrt{(x-\epsilon d)^2 + y^2}; \overline{PF_1} = \epsilon \overline{PL_1};$$

$$\sqrt{(x-\epsilon d)^2 + y^2} = \epsilon(x + d_1) \tag{3}$$

Durch Umformung:

$$y^2 = -(1-\epsilon^2)x^2 + 2\epsilon d_1(1+\epsilon)x \tag{4}$$

Koordinaten des Punktes $F_1^*(\epsilon d_1|p)$ in (4) einsetzen:
$p^2 = -(1-\epsilon^2)(\epsilon d_1)^2 + 2\epsilon(1+\epsilon)\epsilon d_1$

$$p = \epsilon d_1(1+\epsilon) \tag{5}$$

(5) in (4) einsetzen

$$y^2 = 2px - (1-\epsilon^2)x^2 \tag{6}$$

3. Tag, Samstag, 11.07.09

Chronisten: Carmen König, Rebecca Westphal

5 Hochseilgarten

Heute bestand die Entspannung nach der geistigen Arbeit am Vormittag darin, einen Spaziergang zu dem Hochseilgarten zu machen, der sich in der Nähe des Wasserfalles, den wir schon am Tag zuvor besichtigten, befand. Nach einer Einführung über die Sicherheitsvorkehrungen hoch in den Bäumen fingen wir an, die ersten Routen des Hochseilgartens zu erkunden. Michael und Matthias bildeten ein Team mit Herrn Oganian, da sie das vierzehnte Lebensjahr noch nicht vollendet hatten und deshalb nicht allein klettern durften. Franziska und Martina blieben in der Jugendherberge, da sie sich lieber ausruhen wollten. Es gab fünf Runden in diesem Garten, die einen unterschiedlichen Schwierigkeitsgrad hatten. Wir bildeten kleine Teams, die immer zusammen Touren kletterten. Der Hochseilgarten hatte sehr schöne Touren, angefangen bei sehr Einfachen für unsere jüngeren Mathematikfreunde bis hin zu einer Tour, die sich in luftiger Höhe von 23 Metern befand und nur für Teilnehmer über 14 Jahren zugänglich war. Diese Tour war sehr spannend und enthielt Parts, die sehr aufregend waren, wie zum Beispiel Bretter, die über zwei Stahlseile genagelt waren und sehr wacklig waren, wenn man darüber gelaufen ist. Zum Glück waren wir immer mit zwei Karabinern gesichert. Jede Tour enthielt viele Seilrutschbahnen, an die man sich anleinte um dann von hoch oben in den Bäumen auf den Boden herunterzusausen. Es waren auch sehr exotische Elemente eingebracht wie ein Spinnennetz, über das man klettern musste oder ein Hanfseil, an dem man sich entlang hangeln musste. Auch gab es viele Bahnen mit Elementen aus Holz, wie Baumstämme, die aufgehängt waren und über die man gehen musste, oder Schaukeln, an denen man sich von einem Balken zum nächsten schwingen musste. Der Hochseilgarten war sehr schön und ein wunderbarer Ausgleich zu den Mathestunden und hat allen sehr viel Spaß gemacht. Danach traten wir wieder den Rückweg an und nachdem wir das Haus erreicht hatten, waren wir alle sehr erschöpft und freuten uns auf eine weitere spannende Mathestunde.

6 Mathematik

6.1 Überführung der Scheitelgleichung einer Ellipse in die Mittelpunktsgleichung

Andreas Mihatsch zeigt an der Tafel, wie (6) mit Hilfe von quadratischer Ergänzung in (1) umgeformt wird.

$$\begin{aligned}
y^2 &= 2px - (1-\epsilon^2)\cdot x^2 \\
y^2 &= -1\cdot(1-\epsilon^2)\cdot(x^2 - \frac{2p}{1-\epsilon^2}\cdot x) \\
y^2 &= -(1-\epsilon^2)\cdot((x - \frac{p}{1-\epsilon^2})^2 - \frac{p^2}{(1-\epsilon^2)^2}) \\
\frac{y^2}{-(1-\epsilon^2)} &= (x - \frac{p}{1-\epsilon^2})^2 - \frac{p^2}{(1-\epsilon^2)^2} \\
1 &= \frac{y^2}{p^2\cdot\frac{1}{1-\epsilon^2}} + \frac{(x-\frac{p}{1-\epsilon^2})^2}{p^2\frac{1}{(1-\epsilon^2)^2}}
\end{aligned}$$

Nun können wir b^2 und a^2 festsetzen:

$$b^2 := \frac{p^2}{1-\epsilon^2} \Rightarrow b := \frac{p}{\sqrt{1-\epsilon^2}}$$
$$a^2 := \frac{p^2}{(1-\epsilon^2)^2} \Rightarrow a := \frac{p}{1-\epsilon^2}$$

Daraus ergibt sich die Gleichung: $\frac{y^2}{b^2} + \frac{(x-a)^2}{a^2} = 1$,
die um a der x-Achse entlang verschobene Mittelpunktgleichung darstellt. Auch können weitere Beziehungen abgeleitet werden:

$$\frac{b^2}{a^2} = 1-\epsilon^2$$
$$\epsilon^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2} = \frac{a^2-b^2}{a^2} = \frac{e^2}{a^2}$$
$$\epsilon = \frac{e}{a} = \frac{2e}{2a}$$

6.2 Berechnung der Exzentrizität

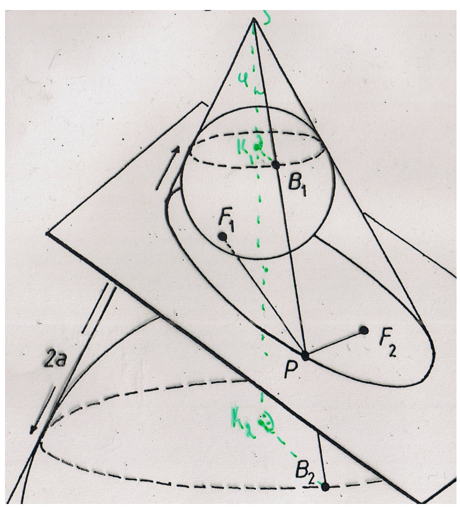


Abbildung 7: Strecke $\overline{B_1B_2}$

Aus der Abbildung 7 folgt:

$$\overline{K_1K_2} = \overline{B_1B_2} \cdot \cos\varphi$$

Aus der Abbildung 8 folgt:

$$\overline{K_1K_2} = \overline{L_1L_2} \cdot \cos\alpha$$

wobei K_1und K_2 die Mittelpunkte der Berührkreise der Dandelinischen Kugeln sind.

$$\Rightarrow \epsilon = \frac{\overline{B_1B_2}}{\overline{L_1L_2}} = \frac{\cos\alpha}{\cos\varphi}$$

Daraus folgt, dass, wenn $\alpha > \varphi$, also $\cos\alpha < \cos\varphi$ ist, gilt unsere Behauptung, dass $\epsilon < 1$ ist.

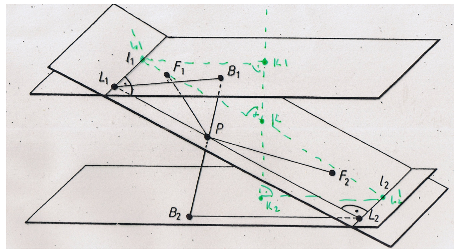


Abbildung 8: Strecke $\overline{L_1L_2}$

6.3 Hyperbel

Nun betrachten wir den Fall, dass $\alpha < \varphi$ gilt.(siehe Abbildung 9)
In diesem Fall gilt auch:

$$\epsilon = \frac{\cos\alpha}{\cos\varphi} = \frac{e}{a} > 1$$

Also ist $e > a$.

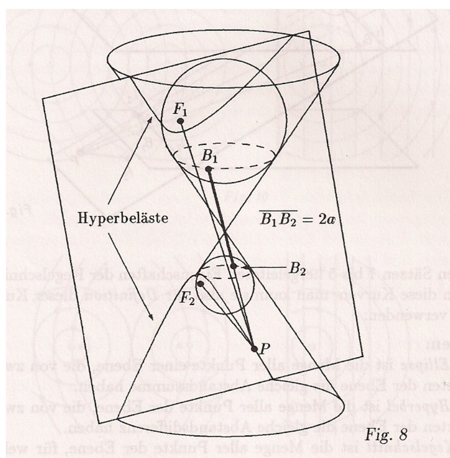


Abbildung 9: Hyperbel

Da die beiden Strecken Tangenten sind, gilt:

$$\overline{PF_1} = \overline{PB_1}$$
$$\overline{PB_1} - \overline{PB_2} = \overline{B_1B_2} = 2a$$

Daraus folgt die allgemine Definition einer Hyperbel:
Eine Hyperbel ist der Geometrische Ort aller Punkte, für die die Differenz der Abstände zu zwei festen Punkten immer konstant bleibt.
Von dieser Definition heraus können wir die Mittelpunktgleichung einer Hyperbel im Kartesischen Koordinatensystem herleiten (siehe Abbildung 10).

$$\overline{PF_1} - \overline{PF_2} = \sqrt{(x-e)^2 + y^2} - \sqrt{(x+e)^2 + y^2} = 2a$$
$$\sqrt{(x+e)^2 + y^2} = 2a + \sqrt{(x-e)^2 + y^2}$$

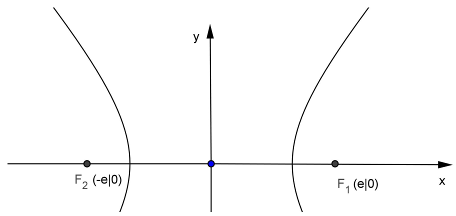


Abbildung 10: Mittelpunktgleichung

Durch Umformungen und Quadrieren erhält man die Mittelpunktgleichung einer Hyperbel:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

wobei $b^2 := e^2 - a^2$ festgesetzt wurde, da e>a ist.

6.4 Asymptoten einer Hyperbel

Die Schnittpunkte einer Geraden g mit einer Hyperbel findet man, in dem man die Geradengleichung in die Gleichung der Hyperbel$H$ einsetzt.

$$g : y = kx$$
$$H : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$
$$x^2(\frac{1}{a^2} - \frac{k^2}{b^2}) = 1 \Leftrightarrow x^2 \frac{b^2 - a^2 \cdot k^2}{a^2 \cdot b^2} = 1$$

Es gibt zwei verschiedene Fälle, in denen die Gerade g keinen Schnittpunkt mit der Hyperbel hat
1.Fall:

$$\frac{b^2 - a^2 \cdot k^2}{a^2 \cdot b^2} = 0$$
$$\Rightarrow b^2 = a^2 \cdot k^2$$
$$\Rightarrow k = \pm \frac{b}{a}$$

2.Fall:

$$b^2 < k^2 \cdot a^2$$
$$k^2 > \frac{b^2}{a^2}$$
$$|k| > \frac{b}{a}$$
$$\Leftrightarrow k < -\frac{b}{a} \vee k > \frac{b}{a}$$

Da die Geraden $y = \pm\frac{b}{a}x$ die Hyperbel nie berühren, sich aber immer weiter annähern nennt man sie Asymptoten.

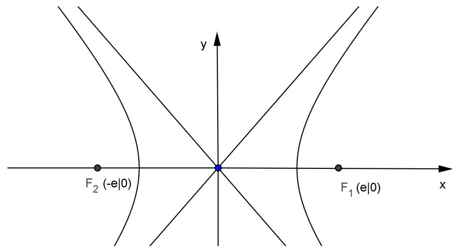


Abbildung 11: Asymptoten einer Hyperbel

4. Tag, Sonntag, 12.07.09

Chronisten: Stefan Jahn (Zeichnungen), Wolf-Xaver Merkt (Formeln), Ruben Schiel (Tagesbeschreibung)

7 Wanderung - der lange Marsch

Heute, am heiligen Sonntag, durften wir alle, nach getaner Arbeit, etwas länger schlafen, so standen wir alle um 8:30 Uhr auf der Matte, um das Frühstück einzunehmen. Nachdem wir uns Brote geschmiert, Müsli vertilgt und Kaba getrunken hatten, machten wir uns frisch ans Werk. So startete gegen 9:30 Uhr eine weitere, interessante Mathestunde (→ Mathematik). Um 12 Uhr Mittags gab es wie immer Mittagessen. Während diesem wurde der weitere Tagesablauf besprochen. Eigentlich sollte am heutigen Abend unser Grillfest stattfinden, doch die Hauseltern sagten uns regen hevor. So verschoben wir dieses Spektakel auf den nächsten Abend. Des Weiteren überlegten wir unser Mittagsprogramm. Wir gingen wandern. Um 13 Uhr trafen wir uns vor der Jugendherberge und liefen, mit aus Krankheit um eine Person geschwächter Gruppe, Richtung Stadt. Als wir wiederum den weltberühntem Triberger Wasserfall passiert hatten, teilten wir unsere Gruppe in drei Splittergruppen, welche in ihrem Tempo weiter wandern durften. So musste niemand hetzen, aber auch keiner unnötig auf andere warten. Nachdem nun ein Großteil der Gruppe sich mit einem Eis gestärkt hatten, lief eine Gruppe zurück zur Jugendherberge, die anderen wanderten, frohen Mutes, weiter, zur größten Kuckucksuhr Deutschlands. Als diese Sensation ausreichend bestaund wurde, trafen sich schließlich alle Gruppen um 16 Uhr, in der Jugendherberge, wieder.
Nun hatten wir bis zum Abendessen frei und konnten Skat, Tischtennis-Rundlauf, Wizard spielen und uns mit anderen, teils mathematischen Dingen, beschäftigen. Nach dem Abendessen gab es dann die 2. Mathe-Einheit (→ Mathematik). Ab 21:15 Uhr hatten wir erneut Freizeit und konnten individuell arbeiten. Um 23 Uhr schliefen wir alle seelig ein.
Zitat des Tages

- *Julius E.* „Dann sterben wir alle“
  Dr. Lomonosova „Das ist auch eine Möglichkeit“

8 Mathematik

8.1 Beweis: Hyperbelgleichung ist gedreht!

Zu Beginn unserer Beschäftigungen mit Mathematik an diesem Tag bewies Aaron in einem Vortrag, dass die Hyperbelgleichung aus dem Mathematikunterricht eine um 45° gedrehte Form des Kegelschnittes darstellt.
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ $y = \frac{1}{x}$

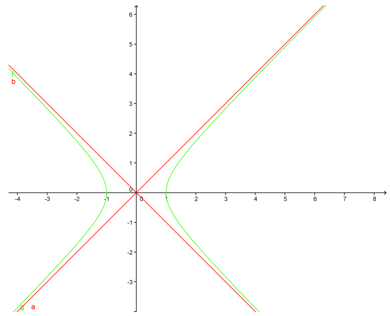


Abbildung 12: Darstellung der von uns hergeleiteten Hyperbel

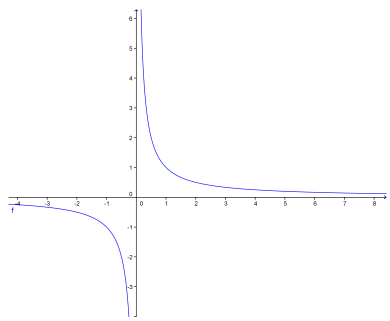


Abbildung 13: Hyperbel wie aus Schulbüchern bekannt

8.1.1 Beweis

$$\begin{aligned} x'^2 + x'^2 &= (y-x)^2 \\ 2x'^2 &= (y-x)^2 && |\sqrt{\ } \\ \sqrt{2}x' &= y-x \end{aligned}$$

$$x' = \frac{y-x}{\sqrt{2}} \tag{7}$$

$$\begin{aligned} 2x^2 &= z^2 \\ y' - x' &= z \\ 2x^2 &= (y'-x')^2 && |\sqrt{\ } \\ \sqrt{2}x &= y' - x' && | + x' \end{aligned}$$

$$\sqrt{2}x + x' = y' \tag{8}$$

(7) in (8)

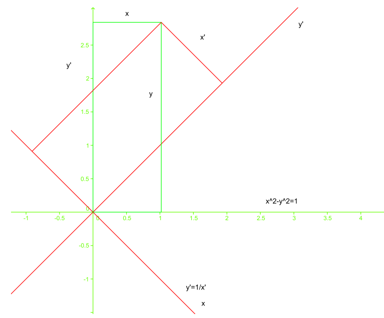


Abbildung 14: Übereinanderlegen der Koordintensysteme

$$
\begin{aligned}
\sqrt{2}x + \frac{y-x}{\sqrt{2}} &= y' \\
y' &= \frac{y+x}{\sqrt{2}} \\
\frac{y+x}{\sqrt{2}} &= \frac{1}{\frac{y-x}{\sqrt{2}}} \\
\frac{y+x}{\sqrt{2}} &= \frac{\sqrt{2}}{y-x} && | \cdot \sqrt{2} \\
y+x &= \frac{2}{y-x} && | \cdot (y-x) \\
(y+x)(y-x) &= 2 \\
y^2 - x^2 &= 2 && | : 2
\end{aligned}
$$

$$\boxed{\frac{y^2 - x^2}{2} = 1}$$

8.2 Definition des Polarkoordinatensystems

Das Polarkoordinatensystem besteht aus der Polarachse und einem Punkt (Pol). Jeder Punkt auf der Ebene wird eindeutig durch seinen Abstand zum Pol und dem Winkel zwischen der Polarachse und dem Strahl auf dem Punkt und der Pol liegt eindeutig definiert.

8.3 Übertragung der Scheitelgleichung auf das Polarkoordinatensystem

$$(r \cdot \sin\gamma)^2 = 2 \cdot p \cdot r \cdot \cos\gamma - (1 - \epsilon^2)(r \cdot \cos\gamma)^2$$

Einsetzen in und Umformen nach r führt zu der folgenden Gleichung:

$$r = \frac{2px\cos\gamma}{1 - \epsilon^2\cos^2\gamma} \tag{9}$$

Wählen wir als Pol einen Brennpunkt und als Polarachse der zur der Leitgerade senkrecht

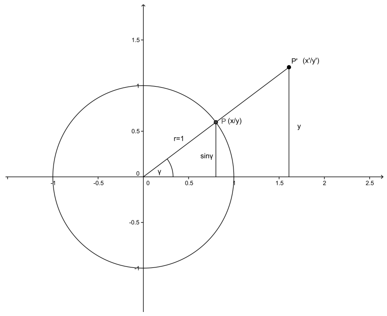


Abbildung 15: Einführung in das Polarkoordinatensystem

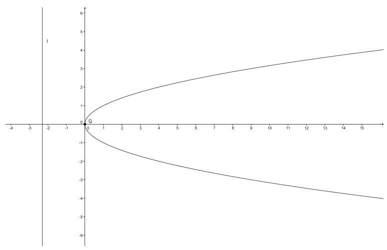


Abbildung 16: Kartesisches Koordinatensystem mit dem Ursprung im Scheitel der Parabel

stehende Strahl.

$$
\begin{aligned}
y^2 &= 2px - (1-\epsilon^2)x^2 \\
\sin(90^\circ - \delta) &= \frac{z}{\rho} \\
\cos\delta &= \frac{z}{\rho} | \cdot \rho \\
\rho \cdot \cos\delta &= z
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\overline{PL} &= z + (1+\epsilon)d_1 \\
\epsilon = \frac{\rho}{z + (1+\epsilon)d_1} &= \frac{\rho}{\rho \cdot \cos\delta + (1+\epsilon)d_1} \\
\rho = \cos\delta \cdot \epsilon \cdot \rho + \epsilon d_1(1+\epsilon) \Leftrightarrow \rho(1 - \epsilon \cdot \cos\delta) &= \epsilon \cdot d_1(1+\epsilon) \\
\rho = \frac{\epsilon \cdot d_1(1+\epsilon)}{1 - \epsilon \cdot \cos\delta} &= \frac{p}{1 - \epsilon \cdot \cos\delta},
\end{aligned}
$$

wobei $p = \epsilon \cdot d_1(1+\epsilon))$ eingesetzt wurde.

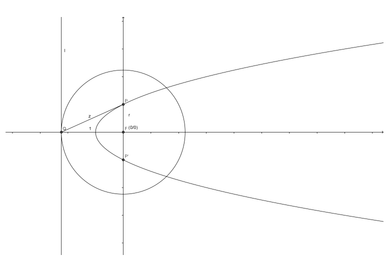


Abbildung 17: Polarkoordinatensystem mit dem Pol im Brennpunkt der Parabel

$$\boxed{\rho = \frac{p}{1 - \epsilon \cdot \cos\delta}}$$

9 Tangenten an Kegelschnitten und Brennpunkteigenschaften

9.1 Ellipse

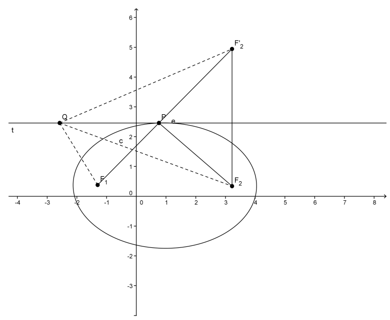


Abbildung 18: Mittelsenkrechtenkonstruktion der Tangente an die Ellipse

9.1.1 Behauptung

Die Mittelsenkrechte zwischen der Strecke $\overline{F_2F_2'}$ ist die Tangente an die Ellipse im Punkt P.

> Unter einer Tangente zu einer Ellipse verstehen wir eine Gerade in der gleichen Ebene der Ellipse, die genau einen Berührpunkt mit der Ellipse hat.

9.1.2 Beweis

1. $\overline{QF_2} = \overline{QF_2'}$, da t die Mittelsenkrechte zu $\overline{F_2F_2'}$ ist.
2. $\overline{QF_1} + \overline{QF_2'} = \overline{QF_1} + \overline{QF_2'} > \overline{F_1F_2'}$, weil die Dreiecksungleichung gilt, aber $\overline{F_1F_2'} = 2a$, somit ist $\underline{\overline{QF_1} + \overline{QF_2} > 2a}$; daher ist $Q \notin$ Parabel.

Da Q ein beliebiger Punkt auf t (ungleich P) ist, ist t eine Tangente.

9.2 Leitkreiskonstruktion einer Ellipse

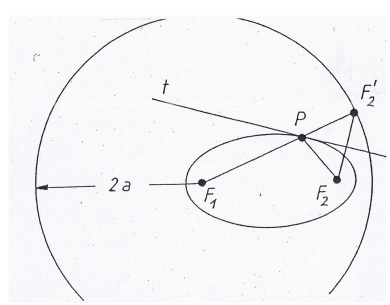


Abbildung 19: Leitkreiskonstruktion einer Ellipse

Bekannt sind F_1F_2 und $2a$.

1. Vom Punkt F_1 als Kreiszentrum einen Kreis mit dem Radius $R = 2a$ konstruieren.
2. Auf dem Kreis F_2' wählen.
3. F_2' und F_2 verbinden.
4. Mittelsenkrechte zur Strecke $\overline{F_2 F_2 i}$ zeichnen.
5. Schnitpunkt der Mittelsenkrechte mit dem Kreis nehmen.

Die Normale im Punkt P ist die Winkelhalbierende.

9.3 Tangentengleichung einer Ellipse

Im Folgenden soll die Gleichung einer Tangenten t, welche die Ellipse im Punkt P berührt, hergeleitet werden.

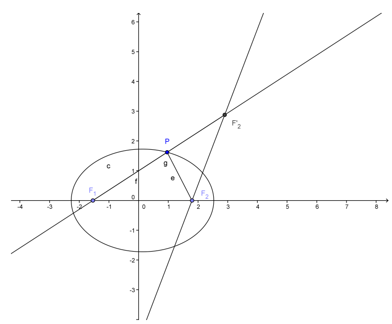


Abbildung 20: Skizze zur Herleitung der Tangentengleichung

1. Gleichung der Geraden $(F_1 P)$

$$\frac{y_0 - 0}{x_0 + e} = \frac{y - 0}{x + e}$$
$$y = \frac{y_0 - 0}{x_0 + e} \cdot (x + e)$$

2. Abstand zwischen zwei Punkten ($d = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}$)

$$F_1(e/0),\ F_{2'}(x/\frac{y_0}{x_0 + e}(x + e))$$

$$2a = \sqrt{(x + e)^2 + (\frac{y_0}{x_0 + e}(x + e))^2}$$
$$2a = (x + e)\sqrt{1 + (\frac{{y_0}^2}{(x_0 + e)^2}}$$
$$2a = \frac{(x + e)\sqrt{(x_0 + e)^2 + {y_0}^2}}{x_0 + e}$$

$$\frac{2a \cdot (x_0 + e)}{\sqrt{(x_o + e)^2 + {y_0}^2}} = x + e$$

$$X_{F_2'} = \frac{2a \cdot (x_0 + e)}{\sqrt{(x_o + e)^2 + {y_0}^2}} - e$$
$$Y_{F_2'} = \frac{y_0}{x_0 + e} \cdot \frac{2a(x_0 + e)}{\sqrt{(x_0 + e)^2 + y_0^2}} = \frac{y_0 \cdot 2a}{\sqrt{(x_0 + e)^2 + y_0^2}}$$

3. Die Steigung der Geraden (F_2F_2')
   Durch die Koordinaten der Punkte F_2 und F_2' wird mit der Zweipunkteform der Geradengleichung die Steigung der Geraden ausgerechnet.

$$m_{(F_2F_2')} = \frac{y_{F_2'} - y_{F_2}}{x_{F_2'} - x_{F_2}} = \frac{a \cdot y_0}{a(x_0 + e) - e\sqrt{\cdots}}$$

4. Die Steigung der Tangente

$$m_t = -\frac{1}{m_{(F_2F_2')}}$$

5. Punktsteigungsform

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{e\sqrt{\cdots} - a(x_0 + e)}{a \cdot y_0} \tag{10}$$

6. Vereinfachung
   Die Gleichung (10) wird vereinfacht und sieht nach der Vereinfachung wie folgt aus:

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1$$

5. Tag, Montag, 13.07.09

Chronisten: Julius Julius Ehrsam, Daniel Malz, Aaron Stumpf

10 Allgemeiner Tagesablauf

10.1 Ausflug

Nachdem wir am Morgen bereits zwei Doppelstunden Mathe machten, fuhren wir etwas verspätet um kurz nach 13:00 Uhr mit dem Bus zum "Park mit allen Sinnen in Gutach. Dort schlossen wir unsere Schuhe in einem Schließfach ein, um dann barfuß durch einen liebevoll angelegten Fußweg zu laufen. Die Wege gingen von Erde, Humus, Schotter, über Gras, Sand, Kies bis schließlich zum dreckigstem und nassestem Schlamm. Zwischendurch traf man auf kleine Stationen, bei denen man alle seine Sinne testen konnte. Zum Beispiel musste man riechen, hören oder tasten. Es gab auch Ruheräume, in denen Entspannungsmusik lief, ein guter Geruch in der Luft lag und Sand auf dem Boden war. In diesen Räumen verbrachten die meisten von uns die meiste Zeit. Nach 1,5 Stunden verließen wir den Park wieder, aber natürlich hatten wir erst unsere Füße gewaschen. Nachdem wir unsere Schuhe wieder angezogen hatten, liefen wir ca. 15 min bis zu der Sommerrodelbahn in der Nähe. Wir bekamen jeder ein Ticket und wurden, jeder in einem Wagen, erst den Berg hochgezogen und fuhren ihn dann wieder herunter. In den Wägen, die teilweise überdacht waren, war Platz für zwei und man konnte ihn mit einem Hebel beschleunigen bzw. abbremsen. Nach der ersten Fahrt, wollten eigentlich alle noch mal fahren und letztendlich konnte jeder drei Mal fahren. An einer Stelle in der Strecke, wurde ein Foto gemacht, das man sich dann anschauen und nach belieben kaufen konnte. Zum Schluss wurden wir wieder vom Bus abgeholt, der uns dann wieder zur Herberge fuhr.

10.2 Grillabend

Nach der letzten Mathestunde, in der Stefan uns einen Beweis vorstellte, besprachen wir den Grillabend, den wir vom Vorabend auf den heutigen Abend verschoben hatten. Wir wurden fürs Holzholen, Feuermachen und Tischdecken und Grillen eingeteilt. Das Feuer brannte ziemlich schnell und als es weit genug herunter gebrannt war, wurden auch schon die ersten Steaks und Würstchen auf den Rost gelegt. Diese brauchten erstaunlich lange, denn bis die ersten Fleischstücke genießbar waren, wurden noch etliche Runden Tischtennis gespielt. Dann schließlich, nach 45 min Grillen, konnten sich die Ersten ihr Essen abholen. Die zweite Fuhre Fleisch ging dann schon wesentlich schneller. Nachdem wir gegessen hatten, fanden wir uns zum Großteil um das Feuer ein und spielten eine Zeit lang Pantomime. Aber wir waren anscheinend so laut, dass der Hausvater aufkreuzte und nicht ganz freundlich fragte wie lang wir denn noch machen wollen. Dann regte er sich noch darüber auf, dass wir um diese Zeit noch so laut waren und ging davon. Wir waren dann leiser bis wir uns schließlich endgültig in die Zimmer verzogen.

11 Mathematik

11.1 Vereinfachung der Tangentengleichung für die Ellipse (Fortsetzung)

$$\frac{y-y_0}{x-x_0} = \frac{e\sqrt{(x_0+e)^2+y_0-a(x_0+e)}}{a\cdot y_0} \tag{11}$$

$$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1 \tag{12}$$

$$e^2=a^2-b^2 \tag{13}$$

$$Gleichung(2)\cdot a^2\cdot b^2 \Rightarrow b^2x_0^2+a^2y_0^2=a^2+b^2 \tag{14}$$

(3)in(4) $\Rightarrow (a^2-e^2)\cdot x_0^2+a^2y_0^2=a^2(a^2-e^2)$

$$\Leftrightarrow e\sqrt{(x_0+e)^2+y_0^2}=\frac{e}{a}\cdot(a^2+ex_0) \tag{15}$$

alte Gleichung für Steigung $m_t mit (5):$

$$m_t=\frac{e\sqrt{(x_0+e)^2+y_0-a(x_0+e)}}{a\cdot y_0}=\frac{\frac{e}{a}\cdot(a^2+ex_0)}{a\cdot y_0}\frac{e}{a}\cdot(a^2+ex_0)=-\frac{x_0b^2}{y_0a^2}$$

$$\frac{y-y_0}{x-x_0}=-\frac{x_0b^2}{y_0a^2}$$
$$\Leftrightarrow \frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$$

11.2 Parabel

$P\in Parabel\ \frac{\overline{PF}}{\overline{PL}}=\epsilon=1\ \overline{PF}=\overline{PL}\Rightarrow P\in t\rightarrow$ t ist die Mittelsenkrechte

11.2.1 Beweis: t ist Tangente

$\forall Q\in t; Q\neq P$

$\overline{QF}=\overline{QL}$

Δ LQL' ist rechtwinklig $\Rightarrow QL-Hypothenuse, QL'-Kathete$

$\Rightarrow \overline{QL}>\overline{QL'}\Rightarrow\overline{QF}>\overline{QL'}\Longrightarrow Q\notin Parabel$

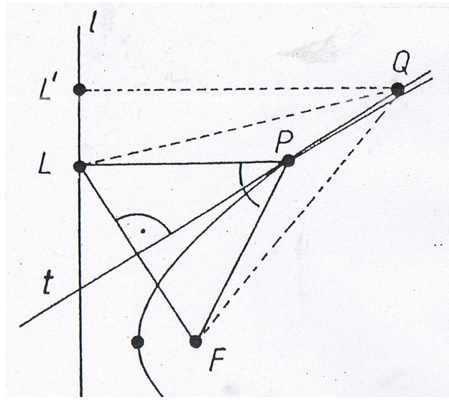


Abbildung 21: Tangente zu einer Parabel

11.3 Namensgebung für Ellipse, Parabel und Hyperbel

Allgemeine Gleichung für Ellipse, Parabel und Hyperbel

$$y^2 = 2px - (1 - \epsilon^2)x^2$$

für die Parabel $\epsilon = 1$: $y^2 = 2px - (1-1)x^2 = 2px \rightarrow$ die Fläche des Quadrates ***gleicht*** der Fläche des Rechtecks.
Für die Hyperbel $\epsilon > 1$: $y^2 = 2px - (1-\epsilon^2)x^2; \rightarrow$ Wert wird zu 2px dazuaddiert, also ist die Fläche des Quadrates ***größer*** als die Fläche des Rechtecks.
Für die Ellipse $\epsilon < 1$: $y^2 = 2px - (1-\epsilon^2)x^2 \rightarrow$ Wert wird von 2px subtrahiert, also ist die Fläche des Quadrates ***kleiner*** als die Fläche des Rechtecks.

11.4 Koordinaten des Brennpunktes F einer Parabel

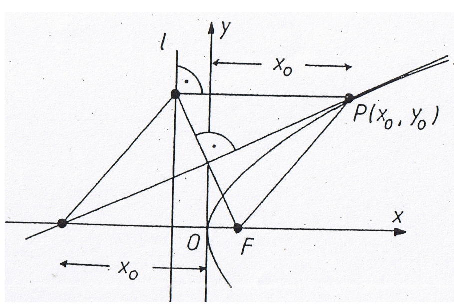


Abbildung 22: Parabel

Parabelgleichung: $y^2 = 2px$; P $\in$ Parabel $\Rightarrow y_0^2 = 2px_0$ $F^* \in Parabel \Rightarrow \overline{F^*M} = \overline{F^*F} \Rightarrow \overline{F^*M} = p$
$\overline{MN} = \overline{NF^*} = x_1 = \frac{p}{2} \Rightarrow F(x_1|0)$

11.5 Herleitung der Tangentengleichung einer Parabel

1. Bestimmung der Steigung der Normalen über die 2-Punkte-Form

$$m_{FQ} = \frac{y_F - y_0}{x_F - x_0} = \frac{0 - y_0}{\frac{p}{2} - \left(-\frac{p}{2}\right)} = -\frac{y_0}{p}$$

2. Bestimmung der Steigung der Tangenten und Herleitung der Gleichung

$$m_t = -\frac{1}{m_{FQ}} = \frac{p}{y_0} = \frac{y-y_0}{x-x_0}; P \in t$$

$$\frac{p}{y_0} = \frac{y-y_0}{x-x_0} \Leftrightarrow \frac{p}{y_0}(x-x_0) + y_0 = \frac{p}{y_0}x - \frac{p}{y_0} \cdot x_0 + y_0 = y$$

$$y_0^2 = 2px_0 \tag{16}$$

$$px - px_0 = y_0 y - y_0^2 \tag{17}$$

Nach dem Einsetzen (16) in (17) entsteht die allgemeine Tangentengleichung

$$p(x + x_0) = y_0 y \tag{18}$$

11.6 Strahlengang in einer Parabel

$DP \perp t$; t ist die Winkelhalbierende von $\angle FPL$
$\angle JPL = \angle JPF; \angle JPL = \angle KPQ \Rightarrow \angle FPD = \angle DPK$
Die aus dem Brennpunkt kommenden Strahlen sind nach der Reflexion an der Parabel parallel und verlassen die Parabel waagrecht zur x-Achse.

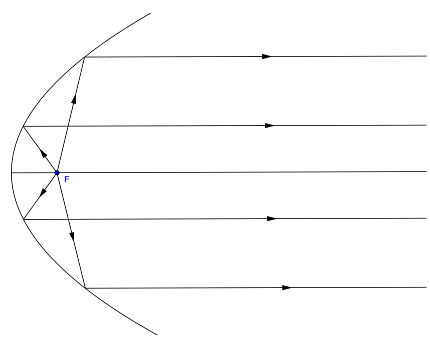


Abbildung 23: Strahlengang in einer Parabel

11.7 Konstruktion einer Tangenten an eine Hyperbel und Beweis

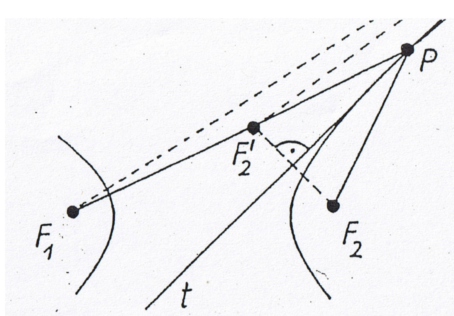


Abbildung 24: Tangente an eine Hyperbel

$|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}| = 2a$
$\overline{PF_2}$ wird auf $\overline{PF_1}$ abgetragen, es entsteht F_2'. $\overline{PF_2'} = \overline{PF_2}$ t ist die Mittelsenkrechte von F_2' und $F_2 \Rightarrow \overline{QF_1} - \overline{QF_2} \neq 2a$
Die Dreiecksungleichung wird auf das Dreieck $\Delta F_1 F_2' Q$ angewendet:
$\overline{F_1Q} < \overline{F_1F_2'} + \overline{F_2'Q}$
$|\overline{F_1Q} - \overline{F_2'Q}| < \overline{F_1F_2} = 2a \Rightarrow |\overline{F_1Q} - \overline{F_2Q}| < 2a$
Folglich kann Q nicht auf der Hyperbel liegen und t ist eine Tangente, da sie nur einen Berührpunkt mit der Hyperbel hat.

11.8 Leitkreiskonstruktion einer Hyperbel

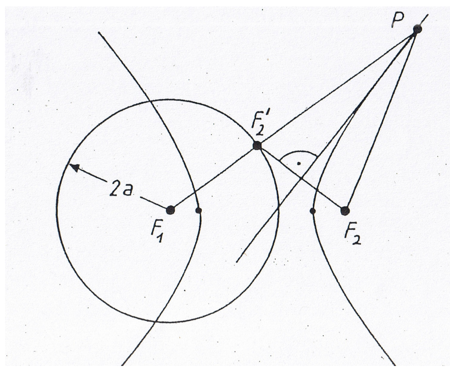


Abbildung 25: Leitkreiskostruktion einer Hyperbel

Gegeben ist F_1, F_2, a

1. Kreis K um F_1 mit dem Radius $r = 2a$.
2. F_2' ist ein beliebiger Punkt auf K.
3. Gerade durch F_1F_2'
4. Mittelsenkechte t der Strecke $F_2'F_2$
5. P ist der Schnittpunkt von F_1F_2' und t

Aus der Konstruktion folgt, dass $P \in Hyperbel$

11.9 Strahlengänge in einer Hyperbel

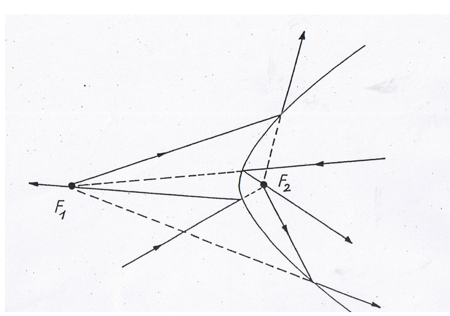


Abbildung 26: Strahlengänge in einer Hyperbel

Wenn die Lichtquelle in einem Brennpunkt ist, so geht die Verlängerung eines reflektierten Strahls durch den anderen Brennpunkt.

11.10 Hyperbeln und Ellipsen mit dem selben Brennpunkt schneiden sich im rechten Winkel

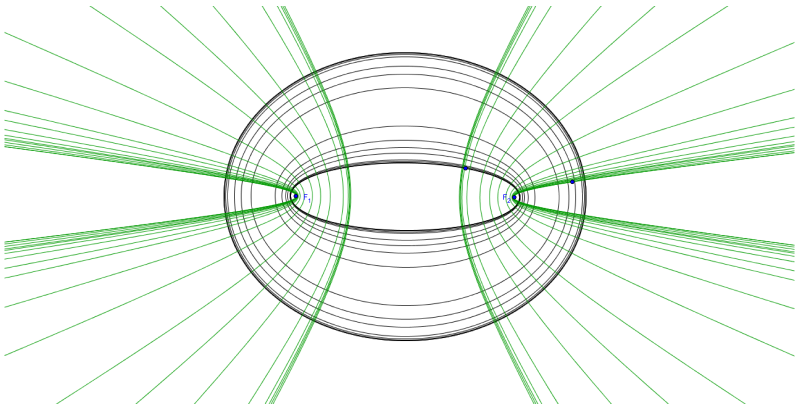


Abbildung 27: Orthogonale Ellipsen und Hyperbel

1) $\frac{x \cdot x_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1 \; m_{t_E} = ?$
2) $\frac{x \cdot x_0}{a_1^2} - \frac{yy_0}{b_1^2} = 1 \; m_{t_H} = ?$
Wir bedienen uns der Hauptform $y = mx + c$ und stellen beide Gleichungen nach y um und erhalten:

$$m_{t_E} = -\frac{x_0 b^2}{a^2 * y_0}$$

$$m_{t_H} = \frac{x_0 b_1^2}{a_1^2 * y_0}$$

$$m_{t_E} \cdot m_{t_H} = -\frac{x_0^2 b^2 b_1^2}{y_0^2 a^2 a_1^2} = -1$$

$\Rightarrow \frac{x_0^2 b^2 b_1^2}{y_0^2 a^2 a_1^2} = 1 \Leftrightarrow x_0^2 b^2 b_1^2 = y_0^2 a^2 a_1^2$
Aus den Formeln: $e^2 = a^2 - b^2 = +a_1^2 + b_1^2$

$$\frac{x_{0^2}}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = \frac{x_{0^2}}{a_1^2} - \frac{y_0^2}{b_1^2} = 1 \tag{19}$$

$a_1 < e < a$; $b_1^2 = e^2 - a_1^2$

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = \frac{x_0^2}{a_1^2} - \frac{y_0^2}{b_1^2}$$

$$\rightarrow x_0^2 (\frac{1}{a^2} - \frac{1}{a_1^2}) = -y_0 (\frac{1}{b^2} + \frac{1}{b_1^2})$$

$$\rightarrow x_0^2 (\frac{a_1^2 - a^2}{a^2 a_1^2}) = -y_0 (\frac{b^2 + b_1^2}{b^2 b_1^2})$$

$$-(a_1^2 - a^2) = b^2 + b_1^2 = k$$

$$-\frac{x_0^2 k}{a^2 a_1^2} = -\frac{y_0^2 k}{b^2 b_1^2}$$
$$\Leftrightarrow x_0^2 b^2 b_1^2 = y_0^2 a^2 a_1^2$$

q.e.d.

6. Tag, Dienstag, 14.07.09

Chronisten: Andreas Mihatsch, Karla Markert, Julius Greiner
Der letzte Tag vor der Abreise wurde in besonderer Weise verbracht. Wir Schüler bereiteten uns morgens auf den Mathematikwettbewer 'MatBoj' vor. Als Belohnung erlebten wir vielleicht den Höhepunkt der Sommer-Akademie: Wir besuchten nachmittags das Mathematische Forschungsinstitut Oberwolfach und konnten die Wissenschaft hautnah erleben. Der stellvertretende Direktor Herr Klaus führte zuerst durch das Institut und zeigte uns die riesige mathematische Bibliothek. Daraufhin durften wir uns einen Vortrag von Hr. Prof. Zagier, einer Koryphäe auf dem Gebiet der Zahlentheorie, anhören.

12 Vorbereitung auf das MatBoj am Vormittag

Der mathematische Wettbewerb, auf welchen wir uns am Vormittag des letzten Tages vor der Abreise vorbereiteten heißt 'Matboj' und stammt aus der ehem. Sowjetunion. Da noch keiner der Schüler etwas von dieser Art des mathmatischen 'Kräftemessens' gehört, geschweige denn je an ihm teilgenommen hatte, wurde erst einmal erklärt worum es sich dabei handelt: Matboj ist das 'Debating der Mathematiker', denn es treten ebenfalls zwei Mannschaften (in unserem Falle jeweils acht Schüler) gegen einander an und versuchen einer Jury beim Vorstellen der Aufgaben zu beweisen, dass sie die gestellten Aufgaben besser gelöst haben als die Gegner. Zu aller erst bestimmten wir enen 'Mannschaftskapitän' und teilten die Aufgaben untereinander auf. Also machte unsere Mannschaft sich daran die vier Aufgaben, zu Themen, die wir während der Zeit in Triberg behandelt hatten, zu lösen. Dabei gingen wir in Gruppen, bestehend aus zwei Schülern, vor. Und wie es bei mathematischen Problemen nun einmal ist, benötigten wir für verschiedene Aufgaben unterschiedlich viel Zeit. Beim Lösen der Aufgaben konnte man all das bereits erlernte Wissen aus dem Schulunterricht, sowie die neu erworbenen Kenntnisse anwenden. Auch wenn die erste Aufgabe bereits nach einer Virtelstunde gemeistert war, benötigte man doch bei einer der Aufgaben weitaus mehr Zeit, um auf den richtigen Weg zu gelangen. Selbst um zehn Uhr am Abend brüteten einige Schüler noch über einer der Aufgaben. Letztendlich konnten glücklicherweise beide Mannschaften alle Aufgaben lösen und am folgenden Tag wird sich zeigen, wer die stichhaltigeren Beweise, den logischeren Gedankengang, die einfacher verständliche Lösung und natürlich die wenigsten Rechenfehler gemacht hat.

13 Das MFO

13.1 Die Bibliothek

Das besondere Highlight des Tages war der Ausflug nach Oberwolfach. Dort befindet sich das Mathematische Forschungsinstitut Oberwolfach, ein Forschungsinstitut der besonderen Art. Getragen von der Leibniz Gesellschaft können sich am MFO Forschungsgruppen um einen einwöchigen Aufenthalt bewerben. Wird die Bewerbung angenommen können insgesamt 50 Mathematiker der ganzen Welt zu dieser Projektwoche eingeladen werden. Das Thema der aktuellen Woche war die 'explizite Zahlentheorie', das Spezialgebiet von unter anderem Don Zagier. Aber davon wird später noch die Rede sein.
Sofort als wir am MFO aus dem Bus stiegen, waren wir von Mathematik umgeben. Direkt vor

dem Gebäude stand eine Skulptur der Projektion der Bor'schen Fläche auf den 3-dimensionalen Raum. (Mehr Dimensionen hätte man auch schlecht als Skulptur darstellen können.) Diese Fläche entsteht durch die Verklebung der Kante eines Möbiusbandes mit dem Rand einer Kreisescheibe und kann in drei Dimensionen nicht ohne Selbstdurchdringung dargestellt werden. Vor der Skulptur empfing uns Herr Dr. Klaus, der stellvertretende Direktor des MFO. Er führte uns danach in den Forschungstrakt, das Herz des MFO. Wir sahen dort die riesige mathematische Bibliothek, die immerhin 45.000 Werke umfasst. Das geballte Wissen der Mathematik war dort gelagert - und das hat seinen Preis. Die Bibliothek stellt den größten Kostenfaktor im Haushalt des MFO dar, was vor allem an den sehr teuren Fachzeitschriften, die abonniert werden müssen, liegt. So eine Zeitschrift kann im Jahresabonnment über 5.000 kosten - eine gigantische Summe, die zeigt, wie sehr die Wissenschaft von den kommerziellen Verlägen abhängig ist. Über 500 solcher Zeitschriften werden am Institut abonniert und tragen so zu den 50 Regalmetern Literatur, die jährlich zu dem schon vorhandenen Kilometer hinzukommen, bei.

Abbildung 28: Mit dem Dr. Klaus in der Bibliothek des MFO

13.2 Don Zagier: Potenzen und Modulfunktionen

Bald wurden wir jedoch unterbrochen und aus der ruhigen Atmosphäre der Bibliothek gerissen. Don Zagier, hieß es, warte auf uns im Vortragssaal. Dieser unscheinbare Herr gehört zu den führenden Mathematikern auf dem Gebiet der Zahlentheorie. Er betreibt an seiner Professur in Bonn zur Zeit über 30 Forschungsprojekte gleichzeitig. Davon entfallen etwa 10 auf die Zusammenarbeit von Mathematik und Physik im Zusammenhang mit der Stringtheorie; weitere 10 haben mit der Zahlentheorie zu tun, Don Zagiers Fachgebiet und Leidenschaft. Einige seiner wichtigsten Arbeiten haben mit Modulfunktionen zu tun. Mithilfe dieser Funktionen können Aussagen über die Lösbarkeit von Gleichungen des Typs $n = a^k + b^k$ für gegebenes $n, k \in \mathbb{N}$ und $a, b \in \mathbb{Q}$ getroffen werden. Hr. Zagier hat Freude daran mit anderen Personen zu reden und sich auszutauschen. Obwohl er ein Mathematiker von Weltrang ist, macht es ihm Spass seine Begeisterung für Mathematik mit Nicht-Mathematikern zu teilen. Dabei kann er das Vortragsniveau hervorragend an sein Publikum anpassen. Wir hatten das Glück einen seiner Vorträge erleben zu können.

13.3 Der Vortrag

Don Zagier arbeitet mit Modulfunktionen und so liegt es nahe, uns die diophantische Gleichung $n = a^2 + b^2$ für $n, a, b \in \mathbb{Z}$ als Spezialfall der Gleichung von oben zu präsentieren. Welche natürlichen Zahlen lassen sich als Summe von zwei Quadratzahlen darstellen? Für dieses Problem benötigt man noch keine Modulfunktionen, das wäre auch viel zu kompliziert geworden.
Bereits sehr früh war die Beziehung $(a^2+b^2)(c^2+d^2) = (ac+bd)^2+(ad-bc)^2$ bekannt. Das bedeutet, dass sobald n und m als Summe zweier Quadratzahlen darstellbar sind, es auch $n \cdot m$ ist. Man kann sich also bei der Untersuchung des Problems zuerst auf die Primzahlen beschränken. Jede Zahl lässt sich nämlich bis auf die Reihenfolge eindeutig in Primfaktoren zerlegen. Sind alle diese Primfaktoren als Summe von zwei Quadratzahlen darstellbar, ist es ihr die Zahl auch. (Daraus folgt noch nicht, dass wenn eine Primzahl nicht als Summe von zwei Quadraten darstellbar ist, es ein Vielfaches von ihr auch nicht ist. Das zu zeigen hätte den Rahmen der Vorlesung gesprengt.)
Als notwendige Bedingung erkennt man recht schnell, dass eine Primzahl nur als Summe von zwei Quadraten darstellbar ist, wenn sie bei der Teilung durch 4 den Rest 1 lässt. (Die zwei ist eine Ausnahme mit $2 = 1^2+1^2$.) Diese Bedingung ist ebenso hinreichend, wofür Don Zagier den bislang kürzesten Beweis (ca. 2cm) gefunden hat.
Mit dem Vortrag wollte Don Zagier uns vor allem zeigen, wie Mathematik 'motiviert' ist. Das bedeutet, er wollte uns zeigen, wie Mathematiker denken und wie neue Ideen entstehen. Dazu zeigte er uns, wie das Problem verallgemeinert, bzw. in welche Richtungen weitergedacht werden kann. Wie sieht es mit der Lösungsmenge der Gleichung für $a, b \in \mathbb{Q}$ aus? Es gilt, dass für keine Primzahl, die bei der Teilung durch 4 den Rest 3 lässt eine rationale Lösung der Gleichung existiert. Allerding lassen sich aus einer rationalen (auch ganzzahligen) Lösung beliebig viele weitere rationale Lösungen konstruieren. Hier entsteht plötzlich eine 'Brücke' zur Geometrie. Lösungen der Gleichung $n = a^2 + b^2$ stellen Punkte auf dem Kreis mit dem Radius $\sqrt{n}$ dar. Durch diesen kann man eine Gerade mit beliebiger rationaler Steigung legen, die den Kreis (sofern es keine Tangente ist) in einem zweiten Punkt schneidet. Die Schnittmenge der Gerade mit dem Kreis ist dabei die Lösung einer quadratischen Gleichung, von der jedoch eine Lösung schon bekannt ist (der gegebene Punkt). Der Zweite kann nach dem Satz von Vieta berechnet werden und ist somit ebenso rational.
Eine weitere Verallgemeinerung des Problems stellt der Übergang zu beliebigen Exponenten aus $\mathbb{N}$ dar. Als kleine Anekdote erzählte er, wie er in Frankreich 1789 als Summe zweier Kubikzahlen darstellt und dass 1789 übrigens eine Primzahl sei, was aber die wenigsten Franzosen wüssten...
Don Zagier erzielte bei dieser Verallgemeinerung mit Hilfe der Modulfunktionen den Durchbruch.
Nach dem Vortrag konnten wir Don Zagier über das Leben eines Mathematikers ausfragen. Besonders interessant war seine Antwort auf die Frage, mit welchen Ziel er mathematische Forschung betreiben würde. Genau wie ein Künstler oder Schrifsteller hat er als Mathematiker keine besondere Anwendung als Ziel. Er forscht an der Mathematik aus reiner Liebe zu ihrer Schönheit. Wie der Schriftsteller, der schreibt um zu schreiben, oder der Maler, der malt ohne ein kommerzielles Ziel zu verfolgen arbeitet er an den Problemen der Zahlentheorie. Gleichzeitig arbeitet er, weil damit andere an seine Gedanken teilhaben können. Trotzdem hat Don Zagier den Bezug zur 'Nicht-Mathematik' nicht verloren. So liebt er es sich mit Sprachen zu beschäftigen und hat zahlreiche Hobbies. Auf die Frage, wie der typischer Tagesablauf eines Mathematikers aussieht, antwortete er spontan 'So spät aufstehen, wie möglich.' Dem musste natürlich das obligatorisch 'und so lange Arbeiten wie möglich' folgen.
Auch die schönste Stunde geht vorbei, und so mussten wir uns nach einem kurzen Photoshooting, bei dem gleich noch ein berühmter Mathematiker Dr. Swinnerton-Dyer aufs Bild geholt wurde, von Don Zagier verabschieden. Ein kleines Zahlenrätsel, das ihm Julz stellte konnte er spontan nicht lösen - das hat nur Andreas geschafft.
Nach kurzen Schmökern in der Bibliothek stiegen wir dann auch schon wieder in den Bus um das Abendessen der JuHe genießen zu können.

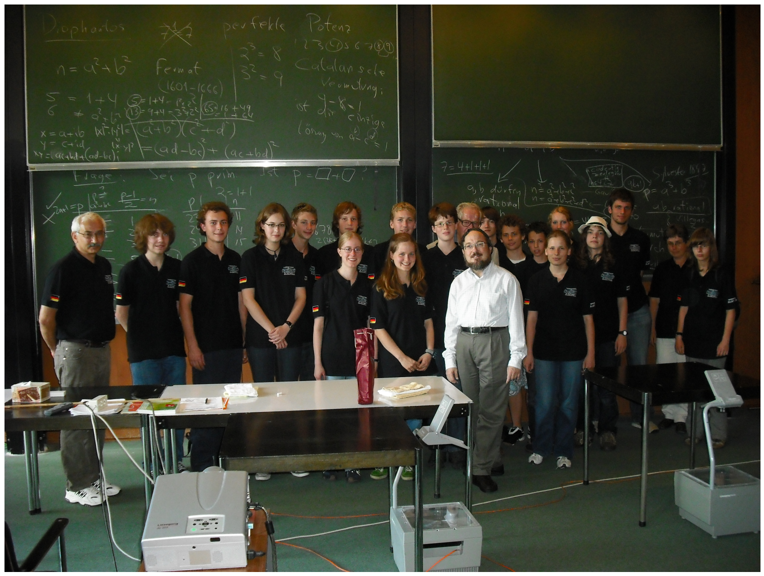


Abbildung 29: Nach dem Vortrag mit Dr. Zagier und Dr. Swinnerton-Dyer im MFO

7. Tag, Mittwoch, 15.07.09 - MatBoj

Chronist: Matthias Böttger

LGH-MatBoj

Nach dem Frühstück und dem Richten unserer Lunchpakete begannen wir gleich mit der Präsentation der am vorigen Tag bearbeiteten Aufgaben des 1. LGH-MatBoj. Zuerst wurden die Namen der Teams verkündet. Sie durften ausgefallen, einfallsreich oder auch ğanz normalšein. Der Name des Team 1 war KuckucksSchlachter und der von Team 2 Riesa. Um festzulegen, wer nach den Regeln den Gegner zuerst auffordern durfte, eine Aufgabe vorzutragen, mussten die Kapitäne der Mannschaften, bzw. ein anderer Ausgewählter (diese Option wurde nicht genutzt), ein Spiel spielen. Der Kapitän von KuckucksSchlachter war Julius Greiner, der von Riesa Rebecca Westphal. In diesem Fall war das Spiel Käsekästchen, was Rebecca souverän gewann. Somit durfte Riesa festlegen, welche Aufgabe das andere Team vorzustellen hatte, aber auch wieder an Riesa abgeben konnte. Man entschied sich für Aufgabe , die dann von Riesa als Paar von und vorgetragen wurde, während Stephan und Carmen von Team Riesa als Opponenten Fragen notierten, die sie anschließend entgegenstellten und von den Vorstellenden beantwortet werden mussten. Am Ende der Runde wurden Punkte vergeben, 8 für KuckucksSchlachter, 2 für Riesa - ein sehr gutes Ergebnis für Opponenten, und 2 für die Jury - Punkte, die kein Team verdient hat. Runde 2: Jetzt forderten die KuckucksSchlachter Riesa auf, Aufgabe vorzutragen. Dies übernahm man mit Karla und , Opposition waren und . Die Punkteverteilung ergab 1:9 :2. Dann stellte KuckucksSchlachter Aufgabe 1 vor mit Laura und Julius Greiner, Opponenten waren Julius Ehrsam und Ruben Schiel. Die Punkteverteilung war 12:0:0. Die letzte Aufgabe, Nummer 2, wurde von Matthias und Rebecca vorgestellt und von Michael und Marimel opponiert. Die Punkteverteilung war so: 0:8:4, somit der Endstand: 21:19:8 und KuckucksSchlachter hatte gewonnen.

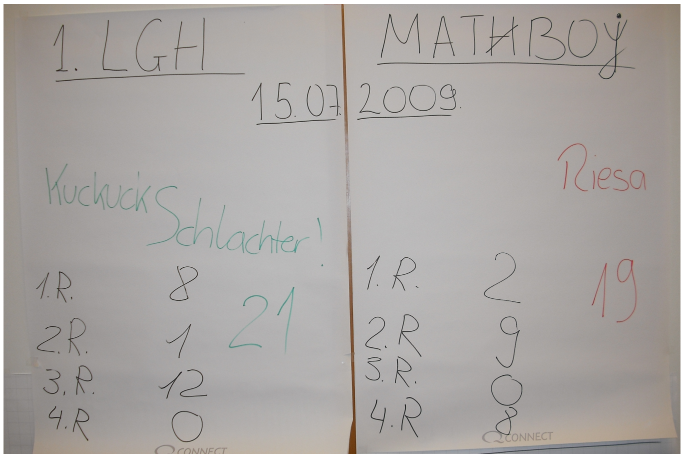


Abbildung 30: Ergebnisse

Unsere Mannschaften

Abbildung 31: KuckuckSchlachter: Julius Greiner, Michael Sonner, Felix Mann, Marimel Mayer, Martina Enzinger, Laura Grunewald, Aaron Stumpf, Wolf-Xaver Merkt

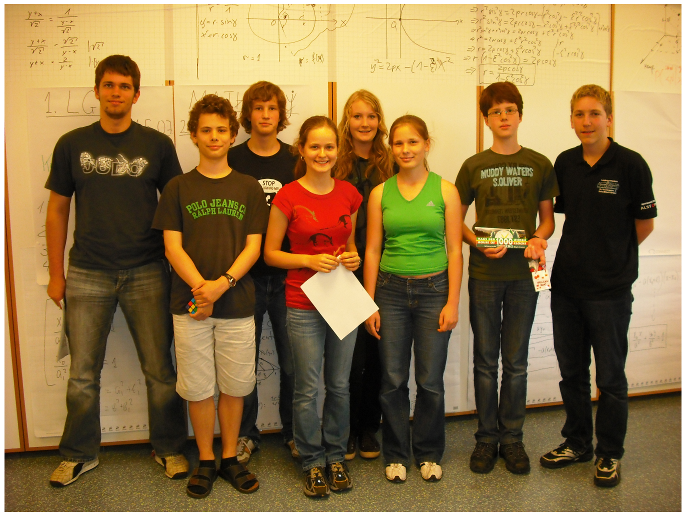


Abbildung 32: Riesa: Rebecca Westphal, Carmen König, Matthias Böttger, Julius Ehrsam, Ruben Schiel, Stefan Jahn, Daniel Malz, Karla Markert

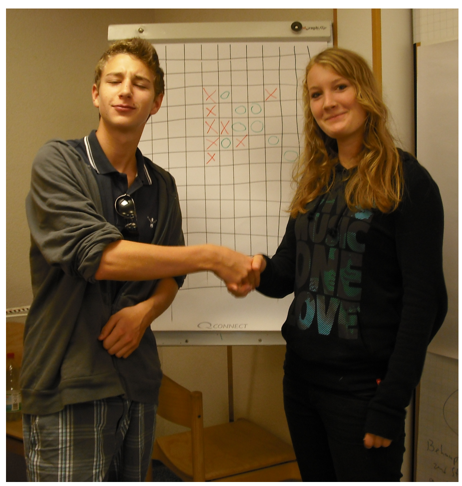
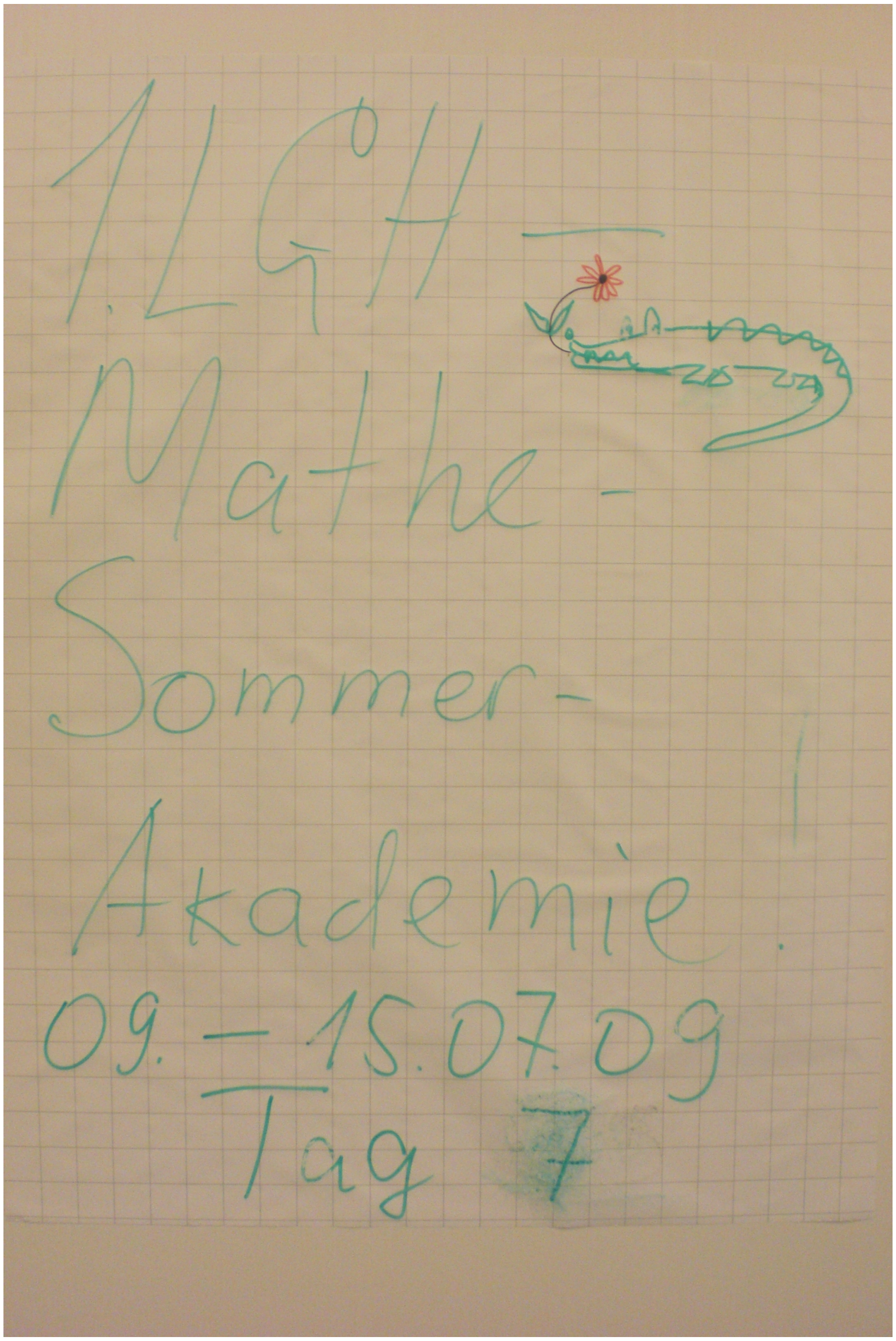


Abbildung 33: Kapitäne

Weiterer Tagesablauf

Nach dem ersten LGH-MatBoj hatten wir erst etwas Freizeit. Dann wurde uns der "4D "Körper", den wir bereits vor dem Mathematischen Institut Oberwollfach als Modell gesehen hatten erklärt. Er besteht aus einem Möbiusband, in welchen eine Kreisscheibe eingebaut ist. So ein Körper schneidet sich selbst und ist deshalb nicht im "normalen"Dreidimensionalen Raum möglich. Dann gingen wir in die Stadt und nach einiger Zeit und viel Langeweile, ohne dass wir etwas zu tun hatten, essen. Dann gab es wieder eine Pause bis unser Zug um 16:14 am Bahnhof eintraf. Zuvor hatten wir ein paar kleine Ratespiele gemacht. Nach der langen Zugfahrt war um ca. 20 Uhr die erste LGH-Mathe-Sommerakademie beendet.


1. LGH-
Mathe-
Sommer-
Akademie!
09. – 15.07.09
Tag 7